ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα πιο κάτω θέματα δόθηκαν στις εξετάσεις Ιουνίου 2013 στο 17ο ΓΕΛ από τους καθηγητές Ν.Κ, Κ.Μ, Δ.Α.
Παρακάτω παρατίθενται τα θέματα και οι λύσεις ανεπτυγμένες σε κάποια σημεία, με σχόλια καθώς και αναφορές στο σχολικό βιβλίο.
Ισως κάποια σχόλια είναι κουραστικά, αλλά έκανα μια προσπάθεια για κάθε τι που χρησιμοποιείται, να γίνεται αναφορά στο σχολικό βιβλίο, ώστε να φιλοτιμηθεί ο μαθητής να ανατρέξει σε αυτό και να διευκολυνθεί στην αναζήτησή του.Φυσικά κάποιος μπορεί να τα παραλήψει και να επικεντρωθεί στις λύσεις.Αλλωστε είναι γραμμένα με μπλέ χρώμα και λοξά γράμματα *(italics)* ακριβώς γι' αυτό τον λόγο.
Για τον σχολιασμό των λύσεων και τις αναφορές στο σχολικό βιβλίο, Δημήτρης Αθανασίου.

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **(Μονάδες 10)** *(σελ. 62 Σχολικού)*

Λύση θέματος 1ο Α.

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \Leftrightarrow$ *(Επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά μπορούμε να υψώσουμε ισοδύναμα στο τετράγωνο)*
$|\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο 1ο μέλος το συμπερασμα* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *και στο 2ο μέλος ιδιότητα των δυνάμεων* $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu$ *).*
$(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο 2ο μέλος δύο φορές το συμπέρασμα* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *)*
$(\alpha\beta)^2 = \alpha^2 \beta^2$

Η τελευταία σχέση ισχύει *(είναι μια γνωστή ιδιότητα των δυνάμεων)* επομένως θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση:
α. Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει 2β=α+γ.
β. Ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$
γ. Ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
δ. Εστω x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.
Τότε $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
ε. Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ **(Μονάδες 5*2=10)**

Απάντηση Β:

α. Σωστό *Σχολικό σ. 126.Εκεί βέβαια έχει* $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ *η οποία όμως κάνοντας «χιαστί» (ουσιαστικά πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το 2) γράφεται ισοδύναμα* $2\beta = \alpha + \gamma$

β. Λάθος

Σχόλιο:

►*Ενας τρόπος να απαντήσουμε σωστά αν έχουμε διαβάσει μόνο θεωρία, είναι να σκεφτούμε ότι αφού δεν θυμόμαστε να έχει το βιβλίο στην θεωρία μια τέτοια ιδιότητα μάλλον δεν θα ισχύει.Πράγματι στην σ.69 του σχολικού υπάρχουν ιδιότητες που αφορούν στην πολλαπλασιασμό και την διαίρεση*

$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, $\quad \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ *αλλά δεν αναφέρει κάτι για πρόσθεση ριζών.*

Ισως κάποιος πεί ότι αυτός είναι ένας «πονηρός» τρόπος, όμως θα έλεγα, κάπως χιουμοριστικά, ότι είναι μια εφαρμογή της μεθόδου απόδειξης «απαγωγή σε άτοπο». Δηλαδή, έστω ότι ίσχυε μια τέτοια ιδιότητα.Τότε θα την είχε το βιβλίο στην θεωρία.Ομως δεν την έχει.Δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο.Αρα δεν ισχύει η ιδιότητα.

►*Ενας άλλος τρόπος είναι με δοκιμή, δηλαδή να δοκιμάσουμε αν ισχύει για δεδομένους αριθμούς α, β που κατά προτίμηση οι ρίζες* $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha+\beta}$ *να βγαίνουν ακριβώς.*

Τέτοιοι αριθμοί είναι α=9, β=16 οπότε :

$\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{\alpha}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{\beta}=\sqrt{16}=4$

Αφού $5\neq 3+4$ *η ιδιότητα δεν ισχύει για αυτούς τους αριθμούς άρα δεν ισχύει γενικά.*

Αλλά και για α=1, β=1 να δοκιμάζαμε θα βρίσκαμε

$\sqrt{2}=2$ *που προφανώς δεν ισχύει.*

►*Τέλος ένας άλλος τρόπος να βρούμε αν ισχύει η ιδιότητα είναι να προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε.*

$\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Leftrightarrow$ *(επειδή τα μέλη είναι μή αρνητικά μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο)*

$\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2\Leftrightarrow$

$\alpha+\beta=\alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta\Leftrightarrow$ *(διαγράφω τους ίδους όρους στα δύο μέλη)*

$0=2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\Leftrightarrow$ *(διαιρώ και τα δύο μέλη με το 2)*

$0=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\Leftrightarrow$ *(υψώνω πάλι στο τετράγωνο αφού τα μέλη μή αρνητικά)*

$0=\alpha\cdot\beta\Leftrightarrow$ *(εναλλάσσω τα δύο μέλη)*

$\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow$ *(ιδιότητα 5 σ.45 σχολικού βιβλίου)*

$\alpha=0$ *ή* $\beta=0$.

Τι διαπιστώνω λοιπόν; Οτι η ιδιότητα ισχύει μόνο αν κάποιος από τους α ή β είναι 0.Μας ρωτάνε όμως αν ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ *.Αρα η απάντησή μας είναι «Λάθος».*

► *Για να ολοκληρώσουμε το θέμα να πούμε ότι στην άσκηση Β5 σ.75 του σχολικού αποδεικνύεται ότι*

$\sqrt{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ *για κάθε* $\alpha,\beta \in [0,+\infty)$.

Η απόδειξη γίνεται παρόμοια όπως προηγουμένως (υψώνουμε στο τετράγωνο και φτάνουμε με ισοδυναμίες σε μια ανισότητα που ισχύει άρα θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική)

δ. Σωστό *(σχολικό σ. 90. Το θέμα αυτό είναι από τα SOS και για θέμα θεωρίας με απόδειξη.)*

ε. Σωστό

(σχολικό βιβλίο σ.55 Ιδιότητες των ανισοτήτων, στο πλαίσιο 2. η τρίτη ιδιότητα.Δεν είναι τίποτε άλλο, από το ότι η φορά μιας ανίσωσης αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό, ιδιότητα που ίσως χρησιμοποιούμε ασυναίσθητα λύνοντας μαι ανίσωση, αλλά εδώ που εκφράζεται γενικά με γράμματα να μην την αναγνωρίζουμε.)

Γ. Ποιά ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος; **(Μονάδες 5)**

Απάντηση Γ: *(σχολικό σ. 133)*

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μή μηδενικό αριθμό.

Θέμα 2ο

Δίνονται τα τριώνυμο $f(x)=2x^2-5x-3$. και $g(x)=x^2-9$.

α) Να παραγοντοποιηθούν . **(Μονάδες 4+4=8)**

β) i) Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$; **(Μονάδες 5)**

ii) Να απλοποιηθεί η παράσταση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. **(Μονάδες 4)**

γ) Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x)\le 0$ και $g(x)>0$. **(Μονάδες 4+4=8)**

Λύση 2ο Θέματος.

● $\alpha=2$, $\beta=-5$ $\gamma=-3$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 7}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+7}{4}=\dfrac{12}{4}=3 \\ x_2=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=2x^2-5x-3=2(x-3)\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-3)\left(2x+2\cdot\frac{1}{2}\right)=(x-3)(2x+1)$$

(δες σχολικό σ. 106-107 Μορφές τριωνύμου)

$$g(x)=x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$$

Η παράσταση $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$ ορίζεται για τα x για τα οποία ο παρονομαστής είναι διάφορη του μηδενός αφού δεν ορίζεται διαίρεση με το 0. *(σχολικό σ. 45)*

Αρα πρέπει $x^2-9\ne 0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)\ne 0\Leftrightarrow x-3\ne 0$ και $x+3\ne 0\Leftrightarrow x\ne 3$ και $x\ne -3$ *(σελ.46 σχολικό)*

Αρα ορίζεται για $x\in(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$

β) ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

γ) Το πινακάκι που δίνει το πρόσημο του $f(x)$ έχει ως εξής: *(σχολικό σ.108-109 Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου)*

x	-∞		$-\frac{1}{2}$		3		∞
$f(x)=2x^2-5x-3$		+	0	-	0	+	

Από το πινακάκι βρίσκουμε άμεσα ότι $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},\ 3\right]$.

<u>Σχόλιο:</u> *Δεν είναι απαραίτητο να γίνει το πινακάκι για να λύσουμε την ανίσωση.Μπορούμε και με το μυαλό να δουλέψουμε ως εξής: Μας ζητάνε για ποιές τιμές του x το τριώνυμο* $f(x)=2x^2-5x-3$ *γίνεται αρνητικό, (αφήνουμε στην άκρη το =0 προς το παρόν), δηλαδή ετερόσημο του α=2>0Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει για τα x μεταξύ των ριζών δηλαδή γιά* $x\in\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$*.Επειδή όμως ζητάει και τα x για τα οποία μηδενίζεται περιλαμβάνουμε και τις ρίζες οπότε τελικά* $x\in\left[-\frac{1}{2},\ 3\right]$.

►Το πινακάκι που δίνει το πρόσημο του $g(x)$ έχει ως εξής

x	-∞		-3		3		∞
$g(x)=x^2-9$		+	0	-	0	+	

Από το πινακάκι βρίσκουμε άμεσα ότι $g(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

<u>Σχόλιο:</u> *Οπως είπαμε και για την προηγούμενη ανίσωση, δεν είναι απαραίτητο να γίνει το πινακάκι για να λύσουμε την ανίσωση.Μπορούμε και με το μυαλό να δουλέψουμε ως εξής: Μας ζητάνε για ποιές τιμές του x το τριώνυμο* $g(x)=x^2-9$ *γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του α=1>0.Από την θεωρία (σ.109 σχολικού βιβλίου) γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει για τα x εκτός των ριζών δηλαδή γιά* $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

Θέμα 3ο

α) Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων $-x^2+x-5$ και x^2-2x+1 για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $\left|-x^2+x-5\right|-\left|x^2-2x+1\right|<x+\left|3-x\right|$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^{2013}-2x=0$

Ποιές από τις λύσεις της εξίσωσης (2) είναι και λύσεις της ανίσωσης (14)

Λύση 3ου θέματος

α) ● $\alpha=-1,\quad \beta=1 \quad \gamma=-5$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4(-1)(-5)=1-20=-19<0$

Οταν η διακρίνουσα είναι αρνητική γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο γίνεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ομόσημο του $\alpha=-1$ δηλαδή για κάθε x γίνεται αρνητικό.

x	-∞		+∞
$-x^2+x-5$		-	

● $\alpha=1,\quad \beta=-2 \quad \gamma=1$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=4-4=0$

Οταν η διακρίνουσα είναι αρνητική γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο έχει μια ρίζα, εδώ την $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{2}{2}=1$ για την οποία μηδενίζεται, ενώ για κάθε άλλη τιμή του x γίνεται ομόσημο του $\alpha=1$ δηλαδή θετικό.

x	-∞		1		+∞
x^2-2x+1		+	0	+	

β) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής $\left|-x^2+x-5\right|=-\left(-x^2+x-5\right)=x^2-x+5$

$\left|x^2-2x+1\right|=x^2-2x+1$

Επομένως η ανίσωση που μας δίνεται, μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά βγάζοντας τα δύο από τα 3 απόλυτα και γράφεται ισοδύναμα:

$\left|-x^2+x-5\right|-\left|x^2-2x+1\right|<x+\left|3-x\right| \Leftrightarrow x^2-x+5-\left(x^2-2x+1\right)<x+\left|3-x\right| \Leftrightarrow$

$x^2-x+5-x^2+2x-1<x+\left|3-x\right| \Leftrightarrow -x+5+2x-1-x<\left|3-x\right| \Leftrightarrow 4<\left|3-x\right| \Leftrightarrow 3-x<-4 \text{ ή } 3-x>4$

$\Leftrightarrow 3+4<x \text{ ή } 3-4>x \Leftrightarrow 7<x \text{ ή } -1>x \Leftrightarrow \quad x<-1 \text{ ή } 7<x$.

γ) $x^{2013}-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^{2012}-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^{2012}=2 \Leftrightarrow x=0$ **ή** $x=\sqrt[2012]{2}$ **ή** $x=-\sqrt[2012]{2}$

Σχόλιο: *Δες σχολικό βιβλίο σ.86 3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^{\nu}=\alpha$.Παρόμοια άσκηση είναι η 4 της Α ομάδας αφού κι εκεί παραγοντοποιεί το πρώτο μέλος.*
Το 2013 είναι μια αναφορά στο τρέχον έτος, αλλά ίσως ένας τόσο ασυνήθιστα μεγάλος αριθμός να «κόμπλαρε» κάποιους μαθητές.

Επειδή:

$1<2 \Leftrightarrow \sqrt[2012]{1}<\sqrt[2012]{2} \Leftrightarrow 1<\sqrt[2012]{2} \Leftrightarrow -\sqrt[2012]{2}<-1$

Συμπεραίνουμε ότι η ρίζα $-\sqrt[2012]{2}$ της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης (ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης)

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2\beta+2\right)x+2\alpha\beta=0$ με $\alpha\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι $\Delta=\left(\alpha^2\beta-2\right)^2$. (Δ: διακρίνουσα)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

γ) Αν οι αριθμοί $\alpha\beta$, 4, $\dfrac{2}{\alpha}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρείτε τον αριθμό β.

δ) Για την τιμή του β που βρήκατε στο ερώτημα γ) να βρεθεί ο αριθμός α ώστε οι τρείς αριθμοί του ερωτήματος γ) να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Λύση 4ου θέματος

Είναι :

$\boldsymbol{\alpha}=\alpha$, $\boldsymbol{\beta}=-\left(\alpha^2\beta+2\right)$ $\boldsymbol{\gamma}=2\alpha\beta$

$\Delta=\boldsymbol{\beta}^2-4\boldsymbol{\alpha\gamma}=\left[-\left(\alpha^2\beta+2\right)\right]^2-4\alpha 2\alpha\beta=\left(\alpha^2\beta+2\right)^2-8\alpha^2\beta=$

$\left(\alpha^2\beta\right)^2+2\alpha^2\beta 2+2^2-8\alpha^2\beta=$

$\alpha^4\beta^2+4\alpha^2\beta+4-8\alpha^2\beta=$

$\alpha^4\beta^2-4\alpha^2\beta+4=$

$\left(\alpha^2\beta\right)^2-2\alpha^2\beta 2+2^2=$

$\left[\alpha^2\beta-2\right]^2$

***Σχόλιο**:Κάποιος μαθητής στην λύση του έξυπνα, απέφυγε να γράψει το* $\left(\alpha^2\beta\right)^2$ *στην μορφή* $\alpha^4\beta^2$ *και μετά να το ξαναφέρει στην μορφή* $\left(\alpha^2\beta\right)^2$*, καθώς και το* 2^2 *δεν χρειάζεται να το γράψουμε 4.*

$$x_{1,2}=\frac{-\boldsymbol{\beta}\pm\sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\alpha^2\beta+2\pm\sqrt{\left[\alpha^2\beta-2\right]^2}}{2\alpha}=\frac{\alpha^2\beta+2\pm\left(\alpha^2\beta-2\right)}{2\alpha}$$

$$x_1=\frac{\alpha^2\beta+2+\left(\alpha^2\beta-2\right)}{2\alpha}=\frac{\alpha^2\beta+2+\alpha^2\beta-2}{2\alpha}=\frac{\alpha^2\beta+\alpha^2\beta}{2\alpha}=\frac{2\alpha^2\beta}{2\alpha}=\alpha\beta$$

$$x_2=\frac{\alpha^2\beta+2-\left(\alpha^2\beta-2\right)}{2\alpha}=\frac{\alpha^2\beta+2-\alpha^2\beta+2}{2\alpha}=\frac{4}{2\alpha}=\frac{2}{\alpha}$$

Β' τρόπος: (*παραγοντοποιώντας το* $1^{ο}$ *μέλος)*

$$\alpha x^2-\left(\alpha^2\beta+2\right)x+2\alpha\beta=0\Leftrightarrow \alpha x^2-\alpha^2\beta x-2x+2\alpha\beta=0\Leftrightarrow \alpha x\left(x-\alpha\beta\right)-2\left(x-\alpha\beta\right)=0\Leftrightarrow$$

$\left(x-\alpha\beta\right)\left(\alpha x-2\right)=0\Leftrightarrow$ *(ιδιότητα 5 σ.45 σχολικό)*

$x-\alpha\beta=0$ ή $\alpha x-2=0\Leftrightarrow x=\alpha\beta$ ή $x=\dfrac{2}{a}$.   *(θυμίζω ότι δίνεται* $\alpha\neq 0$ *)*

Σχόλιο: *Για λύση με παραγοντοποίηση του* $1^{ου}$ *μέλους δες σ.94 άσκηση 9 της Α ομάδας τον 1ο τρόπο λύσης (Βιβλίο λύσεων σ. 39) καιθώς και την άσκηση 5i της Β ομάδας σ.95 τον* $1^{ο}$ *τρόπο λύσης και 5ii τους* $1^{ο}$ *και* $2^{ο}$ *τρόπο λύσης στις σελίδες 43 και 44 του βιβλίου λύσεων.*

Σχόλια:

►*Για την λύση αυτής της άσκησης απαιτείται ο μαθητής να εχει καταλάβει ότι τα* **α, β**, **γ** που εμφανίζονται στον *τύπο της Διακρίνουσας και στον τύπο των ριζών είναι οι συντελεστές του* x^2 *,του x και ο σταθερός όρος αντίστοιχα, χωρίς να διστάσει επειδή δεν βλέπει συγκεκριμένους αριθμούς αλλά γράμματα και αλγεβρικές παραστάσεις. Παρόμοιες ασκήσεις στο σχολικό είναι οι 3 και 5 της Α ομάδας σ. 93-94 και 1 και 5 της Β ομάδας σ. 95 του σχολικού.*

► *Ο παρατηρητικός μαθητής θα αναρωτηθεί γιατί ενώ του τονίζουμε την ιδιότητα* $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ *, εμείς την αγνοήσαμε και γράψαμε* $\sqrt{\left[\alpha^2\beta-2\right]^2}=\alpha^2\beta-2$ *και όχι* $\sqrt{\left[\alpha^2\beta-2\right]^2}=\left|\alpha^2\beta-2\right|$.

Ο λόγος είναι ότι επειδή έχουμε $\pm$ *μπροστά, και να μην βάλουμε απόλυτο θα βρούμε σωστά τις ρίζες.*
Μπορείτε σε παρόμοια περίπτωση λοιπόν να μην βάζετε απόλυτο.
Αυτό το θέμα το ανέλυε ωραία ένα παλιό σχολικό βιβλίο σε μια παρόμοια άσκηση την οποία παραθέτω.

►Να λυθεί η εξίσωση (*σ.120 Σχολικό έκδοση 1999)*

$x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$

ΛΥΣΗ:

$\boldsymbol{\alpha}=1,\ \boldsymbol{\beta}=-2\alpha\quad \boldsymbol{\gamma}=\alpha^2-\beta^2$

$$\Delta=\boldsymbol{\beta}^2-4\boldsymbol{\alpha\gamma}=\left(-2\alpha\right)^2-4\cdot1\cdot\left(\alpha^2-\beta^2\right)=4\alpha^2-4\alpha^2+4\beta^2=4\beta^2$$

οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες.

$$x_{1,2}=\frac{-\boldsymbol{\beta}\pm\sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{\alpha}}=\frac{2\alpha\pm\sqrt{4\beta^2}}{2\cdot 1}=\frac{2\alpha\pm 2|\beta|}{2}=\frac{2(\alpha\pm|\beta|)}{2}=\alpha\pm|\beta|$$

$x_1=\alpha+|\beta|$ και $x_2=\alpha-|\beta|$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta\geq 0$.Τότε $x_1=\alpha+\beta$ και $x_2=\alpha-\beta$
- $\beta<0$.Τότε $x_1=\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$ και $x_2=\alpha-(-\beta)=\alpha+\beta$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί α+β και α-β ανεξάρτητα από το πρόσημο του β.Παρατηρούμε ακόμα ότι, αν στους τύπους (1) τεθεί β αντί του $|\beta|$, προκύπτουν οι ίδιες ρίζες.

Για τον λόγο αυτό στα παρακάτω, όταν η Δ είναι τέλειο τετράγωνο, πχ. $\Delta=\mathrm{A}^2$ τότε για τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \alpha\neq 0$ θα γράφουμε

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\mathrm{A}^2}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\mathrm{A}}{2\alpha}$ αντί του $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\mathrm{A}^2}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm|\mathrm{A}|}{2\alpha}$.

► Η τρόπος κατασκευής της άσκησης είναι να θεωρήσεις δύο αριθμούς (ή παραστάσεις) που θέλεις να είναι ρίζες, εδώ $\alpha\beta$ και $\frac{2}{\alpha}$ και να ξεκινήσουμε από την εξίσωση:

$$(x-\alpha\beta)\left(x-\frac{2}{\alpha}\right)=0\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{\alpha}x-\alpha\beta x+\alpha\beta\cdot\frac{2}{\alpha}=0\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{\alpha}x-\alpha\beta x+2\beta=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha x^2-2x-\alpha^2\beta x+2\alpha\beta=0\Leftrightarrow \alpha x^2-(\alpha^2\beta+2)x+2\alpha\beta=0$$

ή

να χρησιμοποιήσουμε έτοιμο τον τύπο για κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης με δύο ρίζες $x^2-Sx+P=0$ όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα *(σχολικό σ.90 προς το τέλος).*

Στην περίπτωσή μας:

$S=\alpha\beta+\frac{2}{\alpha}=\frac{\alpha^2\beta+2}{\alpha}$ και $P=\alpha\beta\cdot\frac{2}{\alpha}=2\beta$

γ) Γνωρίζουμε ότι 3 μη μηδενικοί αριθμοί **α, β, γ** είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$ *(σχολικό σ.134)* δηλαδή το τετράγωνο του μεσαίου όρου είναι ίσο με το γινόμενο των δύο άκρων όρων.

Επομένως οι $\alpha\beta$, 4, $\frac{2}{\alpha}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου όταν:

$$4^2 = \alpha\beta\frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 16 = 2\beta \Leftrightarrow 2\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \beta = 8$$

δ) Για β=8 οι τρείς αριθμοί γίνονται $\alpha\beta = \alpha 8 = 8\alpha$ οπότε μας ζητείται να βρούμε το α ώστε οι αριθμοί 8α, 4 και $\frac{2}{\alpha}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Γνωρίζουμε ότι 3 αριθμοί **α, β, γ** είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$ *(σχολικό σ.126)* δηλαδή το διπλάσιο του μεσαίου όρουν να είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άκρων όρων.

Επομένως για να είναι οι 8α, 4 και $\frac{2}{\alpha}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει

$2 \cdot 4 = 8\alpha + \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 8 = 8\alpha + \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow$ *(κάνουμε απολοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το α)*

$8\alpha = 8\alpha^2 + 2 \Leftrightarrow 8\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow$ *(απλοποιούμε διαιρώντας όλους τους όρους με 2)*

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\alpha)^2 - 2\cdot 2\alpha + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

ΕΠΙΛΟΓΙΚΑ

Τελειώνοντας ας μου επιτραπούν κάποιες παρατηρήσεις για την προετοιμασία για τις εξετάσεις και γενικότερα για την μελέτη ενός μαθήματος.

1. Ξεκινάμε από το να εντοπίσουμε το σχολικό βιβλίο και το βιβλίο λύσεων που τοποθετούμε στο γραφείο μας μαζί με τετράδιο και γραφική ύλη και μολυβάκι, ώστε αν κάτι δεν καταλαβαίνουμε να βάζουμε στο πλάι ένα ερωτηματικό για να το ξαναμελετήσουμε ή να ρωτήσουμε τον καθηγητή μας.

2. Διαβάζουμε μια φορά τουλάχιστον την θεωρία και οπωσδήποτε μαθαίνουμε όσο γίνεται πιο τέλεια τις σχέσεις και τους ορισμούς που βρίσκονται σε θαλασσιά πλαίσια αφού αμέσως -αμέσως μια τέτοια σχέση μπορεί να τεθεί σε ερώτηση σωστού-λάθους.

3. Μελετάμε τα παραδείγματα του βιβλίου που συνήθως είναι τα πιο χαρακτηριστικά για την κατανόηση της θεωρίας.

4. Στον υπόλοιπο διαθέσιμο χρόνο αρχίζουμε να λύνουμε ασκήσεις πρώτα της Α' ομάδας και μετά της Β' αν περισσέψει χρόνος.Κάποιες ασκήσεις οπωσδήποτε πρέπει να τις γράψουμε όμως, αν δεν έχουμε χρόνο μπορούμε να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε την εκφώνηση και αφού αφιερώσουμε ένα λεπτό στη σκέψη του πως θα την λύναμε, να διαβάσουμε την λύση στο βιβλίο λύσεων και να συγκρίνουμε αυτό που σκεφτήκαμε με την λύση.

Ισως κάποια σχόλια είναι κουραστικά, αλλά ήθελα όσο γίνεται να κάνω για κάθε τι που χρησιμοποιούμε αναφορά στο σχολικό βιβλίο, ώστε να φιλοτιμηθεί ο μαθητής να ανατρέξει σε αυτό και να διευκολυνθεί στην αναζήτησή του.

Πέρα από τον βαθμολογικό χαρακτήρα των εξετάσεων καλό είναι να μην χάνεται και ο μαθησιακός τους ρόλος και ελπίζω σε αυτόν να βοηθήσουν οι σημειώσεις αυτές. Τυχόν λάθη, παραλείψεις ή και διαφωνίες ελπίζω να μου επισημανθούν.