ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

►Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ *(σελ. 62 Σχολικού)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε :

1.Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό</u> ακέραιο ν (δηλαδή ν=1,2,3....) ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$ (σελ.56 σχολικού)

2.το συμπέρασμα 3 από τον ορισμό της απόλυτης τιμής $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *(σελ 62 σχολικού, πρώτο μπλέ πλαίσιο)*

2. Την ιδιότητα των δυνάμεων $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha\beta)^{\kappa}$ *(σελ 47 του σχολικού)* για κ=2.

Πιο κάτω κάνουμε την απόδειξη εξηγώντας σε κάθε βήμα που βασιζόμαστε:

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \Leftrightarrow$ *(Επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά μπορούμε να υψώσουμε ισοδύναμα στο τετράγωνο)*

$|\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο πρώτο μέλος το συμπέρασμα* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *και στο 2º μέλος ιδιότητα των δυνάμεων).*

$(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2|\beta|^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο δεύτερο μέλος δύο φορές το συμπέρασμα* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *)*

$(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$

Η τελευταία σχέση ισχύει *(είναι μια γνωστή ιδιότητα των δυνάμεων)* επομένως θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

►**i)** Να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ *(σελ. 62-63 Σχολικού)*

ii) Πότε η πιο πάνω σχέση ισχύει ως ισότητα;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

i) $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow$ *(Επειδή και τα δύο μέλη είναι μή αρνητικά μπορούμε να υψώσουμε ισοδύναμα στο τετράγωνο (Ιδιότητα 4 ανισοτήτων σ.55 σχολικού)*

$|\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο πρώτο μέλος το συμπέρασμα 3* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *και στο 2º μέλος την ταυτότητα* $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ *).*

$(\alpha+\beta)^2 \le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$ *(Εφαρμόζουμε στο 1ο μέλος την ταυτότητα* $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ *και στο 2º μέλος δύο φορές το συμπέρασμα* $|\alpha|^2 = \alpha^2$ *καθώς και την ιδιότητα* $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ *που ήδη έχουμε αποδείξει.)*

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \le \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow$ *(διαγράφουμε τους ίδιους όρους στα δύο μέλη (ιδιότητα 2α των ανισοτήτων σ55)*

$2\alpha\beta \le 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow$ *(απλοποιούμε με το 2 (ιδιότητα 2β των ανισοτήτων σ.55)*

$\alpha\beta \le |\alpha\beta|$

Η τελευταία σχέση ισχύει *(συμπέρασμα 2 του ορισμού της απόλυτης τιμής πρώτο μπλέ πλαίσιο σ.62)* επομένως θα ισχύει και η ισοδύναμή της αρχική. (Δείτε σελ 48 του σχολικού Μέθοδοι απόδειξης το ΣΧΟΛΙΟ 2. *« Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής.Ετσι συμπεραίνουμε ότι και αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.»*

ii) Η τελευταία σχέση $\alpha\beta \le |\alpha\beta|$ ισχύει ως ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ όταν $\alpha\beta \ge 0$ δηλαδή όταν:

- ή $\alpha\beta = 0$ που σημαίνει ότι ένας τουλάχιστον των α, β είναι 0
- ή όταν $\alpha\beta > 0$ δηλαδή όταν οι α, β είναι ομόσημοι (δηλαδή ή και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί).

Αρα και η ισοδύναμη αρχική σχέση ισχύει ώς ισότητα, δηλαδή $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ όταν ένας τουλάχιστον των α, β είναι 0 ή αν οι α, β είναι ομόσημοι.