ΤΡΙΩΝΥΜΟ

2_478

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό **λ**, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Για έχει η εξίσωση ρίζες πραγματικές πρέπει $\Delta \geq 0$.

*(<u>**Σημείωση**</u>: Αν έλεγε πραγματικές και άνισες θα παίρναμε Δ>0)*

$\alpha = 1$

$\beta = -\lambda$

$\gamma = \lambda^2 + \lambda - 1$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda^2+\lambda-1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε μια δευτεροβάθμια ανίσωση την οποία και επιλύουμε:

$\alpha = -3$

$\beta = -4$

$\gamma = 4$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4(-3)4 = 16 + 48 = 64$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2(-3)} = \frac{4 \pm 8}{-6}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+8}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{4-8}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

Κάνουμε το πινακάκι για το πρόσημο του τριωνύμου $-3\lambda^2-4\lambda+4\geq 0$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\lambda^2-4\lambda+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από το πινακάκι διαπιστώνουμε ότι $-3\lambda^2-4\lambda+4\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq \lambda \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-2,\ \frac{2}{3}\right]$

Σημείωση: Μπορούμε και με το μυαλό να λύσουμε χωρίς πινακάκι σκεφτόμενοι ως εξής:

Θέλουμε τα λ για τα οποία το τριώνυμο $-3\lambda^2-4\lambda+4$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός δηλαδή ετερόσημο του α=-3 ή ίσο με το μηδέν, οπότε όπως γνωρίζουμε από την θεωρία αυτό συμβαίνει ανάμεσα στις ρίζες ή για τις ρίζες δηλαδή:

$-2\leq \lambda \leq \frac{2}{3}$.

β) Για $-2\leq \lambda \leq \frac{2}{3}$ η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda^2+\lambda-1=0$ έχει δύο άνισες ρίζες ή μία διπλή και από τους τύπους για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών έχουμε:

$\alpha=1$

$\beta=-\lambda$

$\gamma=\lambda^2+\lambda-1$

$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lambda}{1}=\lambda$

$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda^2+\lambda-1}{1}=\lambda^2+\lambda-1$

$S^2-P-2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\left(\lambda^2+\lambda-1\right)-2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda^2-\lambda+1-2\geq 0 \Leftrightarrow -\lambda-1\geq 0 \Leftrightarrow -\lambda\geq 1 \Leftrightarrow \lambda\leq -1$

και λόγω της προυπόθεσης $-2\leq \lambda \leq \frac{2}{3}$ έχουμε τελικά $-2\leq \lambda \leq -1 \Leftrightarrow \lambda \in [-2,-1]$.

2_490

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2$-$3x$+1.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\alpha = 2$

$\beta = -3$

$\gamma = 1$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9-8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

β) Αρα από την θεωρία έχουμε: $2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$

γ) Επειδή $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ο $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της ανίσωσης

Αρχικά διαπιστώνουμε ότι : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

και επειδη $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2}{2} = 1$ θα είναι και $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ άρα και το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι ρίζα της ανίσωσης.

2_1097

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Αφού το $x_0 = 1$ είναι ρίζα του τριωνύμου έχουμε¨

$$2\cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 - 2 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Για λ=3 το τριώνυμο γίνεται $2x^2 + 3x - 5$.Είδαμε στο α) ότι έχει μια ρίζα το 1.Αξιοποιούμε τον τύπο για το γινόμενο ριζών για να βρούμε την δεύτερη:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow 1x_2 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$$

Αρα $2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right] = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$

2_1277

Δίνονται οι ανισώσεις: *$-x^2+5x-6<0$ (1)* *και* *$x^2-16\leq 0$ (2).*

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων *(1), (2)*. (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων *(1)* και *(2)* πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\alpha = -1$

$\beta = 5$

$\gamma = -6$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4(-1)(-6) = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Μας ζητείται για ποιά x το τριώνυμο γίνεται θετικό δηλαδή ετερόσημο του α (που είναι αρνητικό).Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει για τα x μεταξύ των ριζών.

Αρα $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ή $x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Το $x^2 - 16$ μπορούμε να το δούμε σαν τριώνυμο με β=0.Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες του.Αυτό μπορεί να γίνει με τους παρακάτω 3 τρόπους:

α’ τρόπος

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ή $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$

β’ τρόπος

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

2_1281

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

Λύση:

$\alpha=-1$

$\beta=\sqrt{3}-1$

$\gamma=\sqrt{3}$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\left(-1\right)\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-x^2+\sqrt{3}x-x+\sqrt{3}=-x\left(x+1\right)+\sqrt{3}\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(\sqrt{3}-x\right)$$

2_1544

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$$ (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\alpha=1$

$\beta=4$

$\gamma=5$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4$

Αφού το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα είναι για κάθε πραγματικό αριθμό ομόσημο του α=1>0 δηλαδή θετικό.

Συμβολικά $x^2+4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Αφού όπως δείξαμε στο α) είναι $x^2+4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από τον ορισμό της απόλυτης τιμής $|x^2+4x+5|=x^2+4x+5$

Επίσης $x^2+4x+4=x^2+2\cdot2x+2^2 \overset{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}{=} (x+2)^2\geq0$

Επομένως από τον ορισμό της απόλυτης τιμής $|x^2+4x+4|=x^2+4x+4$.

Αρα $\mathrm{B}=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|=x^2+4x+5-(x^2+4x+4)=x^2+4x+5-x^2-4x-4=1$