ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΟ

στα οποία η πιο προχωρημένη θεωρία που χρησιμοποιείται αφορά στο

πρόσημο τριωνύμου και λύση Β-θμιων ανισώσεων

ΘΕΜΑΤΑ 4

4_4548, 4_13078, 4_13086, 4_13107

VERSION 13-12-2014 14:00

Αθανασίου Δημήτριος (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

4_4548

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$

$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \lambda - \lambda^2,$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1-2\lambda)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

γ) $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{1} = 1$

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$

Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού θα πρέπει:

$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$

Ομως η $\lambda^2 - \lambda + 1 > 0$ άρα και η ισοδύναμή της αρχική ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ έχει

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

Αρα όπως γνωρίζουμε είναι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ομόσημο του α=1>0.

4_13078

Δίνεται η εξίσωση $(8-λ)x^2 -2(λ-2)x+1=0$, με παράμετρο $λ \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του **λ** ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του **λ** ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του **λ** που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του **λ** που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-λ)x^2 -2(λ-2)x+1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό **x**. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει να μηδενιστεί ο δευτεροβάθμιος όρος, το οποίο επιτυγχάνεται όταν $8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8$

β) Πρέπει Δ=0

$\alpha=8-\lambda$

$\beta=-2(\lambda-2)$

$\gamma=1$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma=0 \Leftrightarrow \left[-2(\lambda-2)\right]^2-4\cdot(8-\lambda)\cdot 1=0 \Leftrightarrow 4(\lambda-2)^2-4(8-\lambda)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2-(8-\lambda)=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+4-8+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=4 \text{ ή } \lambda=-1$$

- Για λ=4 η εξίσωση γίνεται $(8-4)x^2-2(4-2)x+1=0 \Leftrightarrow 4x^2-2\cdot 2x+1=0 \Leftrightarrow (2x)^2-2\cdot 2x+1=0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

- Για λ=−1 η εξίσωση γίνεται

$$(8+1)x^2-2(-1-2)x+1=0 \Leftrightarrow 9x^2-2\cdot(-3)x+1=0 \Leftrightarrow (3x)^2+2\cdot 3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2=0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

γ) Αφού Δ=0 το τριώνυμο για την διπλή ρίζα γίνεται 0 ενώ για κάθε άλλο x γίνεται ομόσημο του συντελεστή του x^2.

- Για λ=4 $8-\lambda=8-4=4>0$
- Για λ=-1 $8-\lambda=8-(-1)=9>0$

Αρα και στις δύο περιπτώσεις το τριώνυμο γίνεται μή αρνητικό για κάθε *x*.

4_13086

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\alpha = \lambda$

$\beta = -(\lambda^2+1)$

$\gamma = \lambda$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-(\lambda^2+1)\right]^2 - 4\lambda\lambda = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = (\lambda^2)^2 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = (\lambda^2)^2 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$$

β) Έχει ρίζες ίσες για $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0$ ή $\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

γ) Θέλουμε το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ ή να μηδενίζεται ή να έχει σταθερό πρόσημο (εδώ αρνητικό) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο για τα λ για τα οποία $\Delta = 0$ οπότε για την διπλή ρίζα το $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ μηδενίζεται ενώ για όλα τα άλλα $x \in \mathbb{R}$ είναι ομόσημο του λ (συντελεστή του x^2.Εμείς θέλουμε να είναι αρνητικό οπότε πρέπει λ<0.Αρα η απάντηση είναι $\lambda = -1$

4_13107

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$.

(Μονάδες 6)

Λύση:

α) $\alpha=\lambda$

$\beta=-(\lambda^2+1)$

$\gamma=\lambda$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\lambda\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=(\lambda^2)^2+2\lambda^2+1-4\lambda^2=(\lambda^2)^2-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ άρα έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$

$P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$

γ) Το γινόμενο των ριζών είναι θετικός άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.Οταν λ>0 και το άθροισμα των ριζών $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$ οπότε συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Κατ΄ αρχάς $f(0)=\lambda>0$

Αφού $x_1<\kappa<x_2$ $f(\kappa)$ ετερόσημο του λ>0, άρα $f(\kappa)<0$

Αφού $x_1<x_2<\mu$ δηλαδή το μ βρίσκεται εκτός των ριζών θα είναι $f(\mu)$ ετερόσημο του λ>0, άρα $f(\mu)>0$.

Άρα τελικά:

$$\text{Πρόσημο}\left[f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)\right]=(+)(-)(+)=(-)$$