ΘΕΜΑ 2 487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10$ **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2-2x+1+y^2+2\cdot 3y+9 = x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$ **και** $y+3=0 \Leftrightarrow x=1$ **και** $y=-3$

ΘΕΜΑ 2 1070

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί ***α, β, γ, δ*** με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι ***α=3β*** και ***δ=5γ*** (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=4\beta-\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta$

$$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow 4\gamma+\gamma=\delta \Leftrightarrow 5\gamma=\delta \Leftrightarrow \delta=5\gamma$$

β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma} \overset{\alpha)}{=} \frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta 5\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$

ΘΕΜΑ 2 1080

Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x*. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση $\frac{4x+5y}{x-4y}$ ορίζεται για $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$.Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 4x+2x=8y-5y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow$$

$$2x=y \Leftrightarrow y=2x$$

β) $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{\alpha)}{=}\frac{2x^2+3(2x)^2+x2x}{x2x}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr *peira.gr*

ΘΕΜΑ 2 3870

Δίνονται οι παραστάσεις: *Κ= 2α²+β²+9* *και* *Λ=2α(3 - β)*, όπου ***α, β*** $\in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: *Κ - Λ=(α²+2αβ+β²)+(α²-6α+9)* (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: *Κ≥Λ*, για κάθε τιμή των ***α, β*** . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των ***α, β*** ισχύει η ισότητα *Κ=Λ*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) $\mathrm{K}-\Lambda=2\alpha^2+\beta^2+9-2\alpha(3-\beta)=2\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta=$ *(«Σπάω» το $2\alpha^2=\alpha^2+\alpha^2$)*

$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta=$ *(αλλάζουμε την σειρά των όρων, αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)*

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2-6\alpha+9=$

$\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-6\alpha+9\right)$

β) $\mathrm{K}-\Lambda=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2$

Για οποιαδήποτε α, β ισχύει $(\alpha+\beta)^2\geq 0$ και $(\alpha-3)^2\geq 0$ άρα και $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2\geq 0$ οπότε:

$\mathrm{K}-\Lambda\geq 0\Leftrightarrow \mathrm{K}\geq\Lambda$

γ) Ισχύει $\mathrm{K}=\Lambda\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$ και $\alpha-3=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha$ **και** $\alpha=3$

$\Leftrightarrow \beta=-3$ **και** $\alpha=3$.

ΘΕΜΑ 2 3874

Δίνονται οι ***μη μηδενικοί*** πραγματικοί αριθμοί ***α, β,*** με ***α ≠ β*** για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2+1}{\beta^2+1}=\frac{a}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί ***α*** και ***β*** είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{a^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{a^{-2}\cdot(a\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow\left(\alpha^2+1\right)\beta=\left(\beta^2+1\right)\alpha\Leftrightarrow\alpha^2\beta+\beta=\beta^2\alpha+\alpha\Leftrightarrow\alpha^2\beta-\beta^2\alpha+\beta-\alpha=0\Leftrightarrow$

$\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0$

Επειδή $\alpha\neq\beta$ θα είναι $\alpha\beta-1=0\Leftrightarrow\alpha\beta=1$ που σημαίνει ότι οι α, β είναι αντίστροφοι.

β) $\mathrm{K}=\frac{\alpha^{22}\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}=$ *Χρησιμοποιώ την ιδιότητα* $\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$ *και το ότι αβ=1 που απέδειξα στο α)*

$\frac{\alpha^{22}\beta^{24}}{\alpha^{-2}1^{25}}=$ *Χρησιμοποιώ την ιδιότητα* $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$

$\alpha^{22-(-2)}\beta^{24}=\alpha^{22+2}\beta^{24}=\alpha^{24}\beta^{24}=(\alpha\beta)^{24}=1^{24}=1$ *αβ=1 που απέδειξα στο α)*