2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ (επιπέδου 2) (30-12-2014)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 486, 506, 1092, 1541, 3852, 4299, 7519,

ΘΕΜΑ 2 486

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Αφού όμως μας δίνεται $\alpha > 0$ θα είναι $\alpha \neq 0$, οπότε και $\alpha^2 > 0$.

Ετσι έχουμε:

$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 \cdot \alpha^2 < \alpha \cdot \alpha^2 < 1 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow 0 < \alpha^3 < \alpha^2$ (1) *(πολλαπλασιάζοντας με $\alpha^2 > 0$ η φορά της ανισότητας μένει ίδια)*

$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow 0 < \alpha^2 < \alpha$ (2) *(πολλαπλασιάζοντας με $\alpha > 0$ η φορά της ανισότητας μένει ίδια)*

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$ (3)

β) $0 < \alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \frac{0}{\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 0 < 1 < \frac{1}{\alpha}$ (4).

Συνδιάζοντας τις (3), (4) καθώς και την δοθείσα $0 < \alpha < 1$ προκύπτει ότι:

$$0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

ΘΕΜΑ 2_506

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες $2 \le x \le 3$ **(1)**, $1 \le y \le 2$ **(2)** και παίρνουμε:

$2+1 \le x+y \le 3+2 \Leftrightarrow 3 \le x+y \le 5 \Leftrightarrow$

β) $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \le 2 \cdot x \le 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2x \le 6$ **(3)**

$1 \le y \le 2 \Leftrightarrow -3 \cdot 1 \ge -3 \cdot y \ge -3 \cdot 2 \Leftrightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3$ **(4)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(3)** και **(4)** έχουμε:

$4-6 \le 2x-3y \le 6-3 \Leftrightarrow -2 \le 2x-3y \le 3$

<u>Σημείωση:</u> Υπενθυμίζουμε ότι δεν μπορούμε να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη (γιατί δεν προκύπτουν πάντοτε αληθείς ανισώσεις). *(δες σχολικό σ.56 ΣΧΟΛΙΑ)*

γ) $1 \le y \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$ **(5)** *(δες εφαρμογή 1 i) σ.58 σχολικό)*

Οι **(1)** και **(5)** έχουν θετικά μέλη και ίδια φορά, άρα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και έχουμε:

$2 \cdot \frac{1}{2} \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2} \le \frac{x}{y} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3$

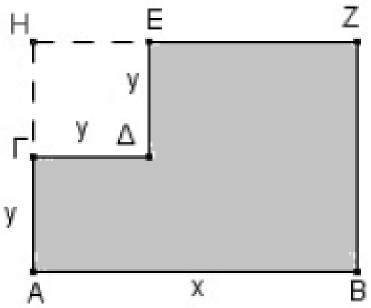
<u>Σημείωση:</u> Υπενθυμίζουμε ότι δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες της ίδια φοράς κατά μέλη *(δες σχολικό σ.56-57 ΣΧΟΛΙΑ).*

Σημείωση: *Στην λύση του mathematica στο γ προφανώς εκ παραδρομής αντί των ορίων της* $\frac{x}{y}$ *βρίσκει αυτά της* $\frac{y}{x}$

ΘΕΜΑ 2_1092

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς *y*.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει *5<x<8* και *1<y<2*, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $EZ = HZ - HE = x - y$ και $ZB = HA = H\Gamma + \Gamma A = E\Delta + \Gamma E = y + y = 2y$

Αρα περίμετρος ΕΖΒΑΓΔ=ΕΖ+ΖΒ+ΒΑ+ΑΓ+ΓΔ+ΔΕ=x-y+2y+x+y+y+y=2x+4y

β) $5 < x < 8 \Rightarrow 2\cdot 5 < 2\cdot x < 2\cdot 8 \Rightarrow 10 < 2x < 16$ (1)

$1 < y < 2 \Rightarrow 4\cdot 1 < 4\cdot y < 4\cdot 2 \Rightarrow 4 < 4y < 8$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$.

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος **x** εκατοστά και πλάτος **y** εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη **x** και **y** ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το **x** μειωθεί κατά 1 και το **y** τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2\cdot x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ **(1)**

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \le 2\cdot y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$8+4 \le 2x+2y \le 14+6 \Leftrightarrow 12 \le 2x+2y \le 20 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$

β) Το μήκος του νέου ορθογωνίου είναι (x-1) εκατοστά και το πλάτος του 3y εκατοστά, οπότε περίμετρος του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου (σε εκατοστά) είναι:

$\Pi' = 2(x-1)+2\cdot 3y = 2x-2+6y = 2x+6y-2$

Από τις δύο δοθείσες διπλές ανισότητες θα προσπαθήσω να σχηματίσω μια καινούργια που ο μεσαίος όρος να είναι η παράσταση $2x+6y-2$

$4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2\cdot x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ **(3)**

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \le 6\cdot y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18$ **(4)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(3)** και **(4)** έχουμε:

$8+12 \le 2x+6y \le 14+18 \Leftrightarrow 20 \le 2x+6y \le 32 \Leftrightarrow 20-2 \le 2x+6y-2 \le 32-2 \Leftrightarrow 18 \le 2x+6y-2 \le 30 \Leftrightarrow 18 \le \Pi' \le 30$

Αρα η περίμετρος του νέου ορθογωνίου θα είναι μεταξύ 18 και 30 εκατοστών.

Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν:

$$2 \le \alpha \le 4 \quad \text{και} \quad -4 \le \beta \le -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Θα προσπαθήσουμε χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ανισοτήτων από τις δοθείσες $2 \le \alpha \le 4$ (1) και $-4 \le \beta \le -3$ (2) να σχηματίσουμε διπλές ανισότητες που το μεσαίο μέλος τους να είναι οι παραστάσεις που δίνονται.

$-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow -2(-4) \ge -2\beta \ge -2(-3) \Leftrightarrow 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$ (3)

Προσθέτωντας κατά μέλη τις (1) και (3) έχουμε:

$2+6 \le \alpha - 2\beta \le 4+8 \Leftrightarrow 8 \le \alpha - 2\beta \le 12$

β) Επειδή τα μέλη της (1) είναι θετικά μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο:

$2 \le \alpha \le 4 \Leftrightarrow 2^2 \le \alpha^2 \le 4^2 \Leftrightarrow 4 \le \alpha^2 \le 16$ (4)

$-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow -2(-4) \ge -2\beta \ge -2(-3) \Leftrightarrow 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$ (5)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (5) *(μπορούμε να το κάνουμε αφού τα μέλη τους είναι θετικά)* έχουμε:

$6 \cdot 2 \le -2\beta\alpha \le 8 \cdot 4 \Leftrightarrow 12 \le -2\alpha\beta \le 32$ (6)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (6) έχουμε:

$4+12 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 16+32 \Leftrightarrow 16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$

ΘΕΜΑ 2_4299

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Μας δίνεται : $3 \leq x \leq 5$ **(1)** $-2 \leq y \leq -1$ **(2)**

Από $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -x \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq -x \leq -3$ **(3)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) και (3) και παίρνουμε:

$$-2-5 \leq y-x \leq -1-3 \Leftrightarrow -7 \leq y-x \leq -4$$

β) $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 3^2 \leq x^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25$ **(4)**

$-2 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow 2 \geq -y \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq (-y)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq y^2 \leq 4$. **(5)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (4) και (5) και παίρνουμε:

$$9+1 \leq x^2+y^2 \leq 25+4 \Leftrightarrow 10 \leq x^2+y^2 \leq 29$$

Θέμα 2_7519

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με α > 0 και β > 0.Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 4$ **(Μονάδες 12)**

α) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)\geq 16$ **(Μονάδες 13)**

Λύση:

α) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2+4\geq 4\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-4\alpha+4\geq\Leftrightarrow(\alpha-2)^2\geq 0$ που ισχύει άρα και η ισοδύναμη αρχική.

β) Από α) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4$ και $\beta+\dfrac{4}{\beta}\geq 4$.Επειδή τα μέλη αυτών των δύο ανισώσεων είναι θετικά μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 4\cdot 4\Leftrightarrow\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

►**<u>Παρατήρηση:</u>** Βλέπουμε εδώ ένα παράδειγμα μιας διαδεδομένης πρακτικής: Οταν μια άσκηση έχει δύο ή περισσότερα ερωτήματα, το αποτέλεσμα των πρώτων ερωτημάτων χρησιμοποιείται στα επόμενα.

Αν κάποιος δεν το «έβλεπε» αυτό (δηλαδή να χρησιμοποιήσει το α))θα μπορούσε να εργαστεί ανεξάρτητα ως εξής:

$$\left(\frac{\alpha^2+4}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta^2+4}{\beta}\right)\geq 16\Leftrightarrow\left(\alpha^2+4\right)\left(\beta^2+4\right)\geq 16\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\beta^2+4\alpha^2+4\beta^2+16\geq 16\alpha\beta\Leftrightarrow\underbrace{\alpha^2\beta^2+8\alpha\beta+16}+\underbrace{4\alpha^2+8\alpha\beta+4\beta^2}\geq 0\Leftrightarrow$$

$(\alpha\beta+4)^2+(2\alpha+2\beta)^2\geq 0$ που ισχύει άρα και η ισοδύναμη αρχική.