ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 489, 504, 505, 509, 996, 1089, 1009, 1062, 1074, 1077, 1273, 1305, 2702

ΘΕΜΑ 2 489

α) Να λύσετε την ανίσωση |*x*-5|<2 (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση |2-3*x*|>5 (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

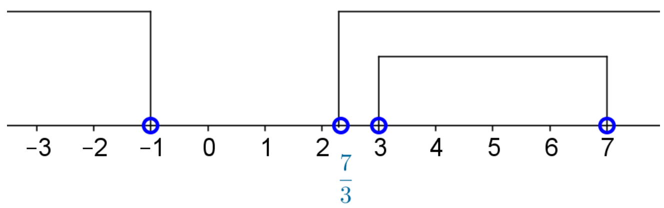
ΛΥΣΗ:

α) $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow -2+5<x-5+5<2+5 \Leftrightarrow 3<x<7$

β) $|2-3x|>5 \Leftrightarrow 2-3x<-5$ ή $2-3x>5 \Leftrightarrow -3x<-7$ **ή** $-3x>3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3}>\frac{-7}{-3}$ **ή** $\frac{-3x}{-3}<\frac{3}{-3} \Leftrightarrow x>\frac{7}{3}$ **ή**

$x<-1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $\Leftrightarrow x>\frac{7}{3}$

γ)



Αρα οι κοινές λύσεις τα $3<x<7$ και ως διάστημα το σύνολο λύσεων παριστάνεται $(3,\ 7)$.

ΘΕΜΑ 2_504 (2.2-2.3)

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν ***α<0***, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|\ge 2$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\alpha\dfrac{1}{\alpha}\ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1\ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\ge 0$ που ισχύει, άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

β) Γνωρίζουμε ότι $|\alpha|\ge 0$ για κάθε α $\alpha\in\mathbb{R}$. Επειδή μας δίνεται α < 0, συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\alpha\neq 0$, οπότε $|\alpha|>0$. Ετσι έχουμε:

$|\alpha|+\left|\dfrac{1}{a}\right|>2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{|1|}{|\alpha|}\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|}\ge 2 \overset{|\alpha|>0}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2+1\ge 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha|+1>0 \Leftrightarrow (|\alpha|-1)^2\ge 0$ που ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

<u>β' τρόπος για το β)</u>

Επειδή α<0 θα είναι $|\alpha|=-\alpha$ οπότε η προς απόδειξη γράφεται:

$|\alpha|+\left|\dfrac{1}{a}\right|>2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{|1|}{|\alpha|}\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|}\ge 2 \Leftrightarrow -\alpha+\dfrac{1}{-\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow -\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow \alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2$.Η τελευταία έχουμε δείξει στο α) ότι ισχύει, άρα θα ισχύει και η ισοδύναμή της αρχική.

ΘΕΜΑ 2 505

α) Να λύσετε την εξίσωση: |2x – 4| = 3|x – 1| (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: | 3x – 5| > 1 (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) $|2x-4|=3|x-1| \Leftrightarrow |2x-4|=|3x-3| \Leftrightarrow 2x-4=3x-3$ ή $2x-4=-(3x-3) \Leftrightarrow$

$2x-3x=4-3$ ή $2x-4=-3x+3 \Leftrightarrow -x=1$ ή $2x+3x=4+3 \Leftrightarrow x=-1$ ή $5x=7 \Leftrightarrow \boxed{x=-1 \text{ ή } x=\frac{7}{5}}$

β) $|3x-5|>1 \Leftrightarrow 3x-5<-1$ ή $3x-5>1 \Leftrightarrow 3x<5-1$ ή $3x>5+1 \Leftrightarrow 3x<4$ ή $3x>6 \Leftrightarrow$

$x<\frac{4}{3}$ ή $x>\frac{6}{3} \Leftrightarrow \boxed{x<\frac{4}{3} \text{ ή } x>2}$

γ) Η $x=-1$ είναι λύση αφού $-1<\frac{4}{3}$. Προφανώς $\frac{7}{5}<\frac{10}{5}=2$ άρα μένει να εξετάσω αν $\frac{7}{5}<\frac{4}{3} \Leftrightarrow 21<20$

Η τελευταία δεν ισχύει άρα δεν ισχύει και η $\frac{7}{5}<\frac{4}{3}$.Επομένως το $x=\frac{7}{5}$ **δεν** είναι λύση της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 2_509

α) Αν ***α, β*** $\in \mathbb{R}$-{0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\beta||\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2 \geq 2|\beta||\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \geq 0$

$(|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$ που ισχύει άρα και η ισοδύναμη αρχική.

β) Η ισότητα στην (1) ισχύει όταν ισχύει η ισότητα και στην ισοδύναμή της $(|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$.

Είναι $(|\alpha|-|\beta|)^2=0 \Leftrightarrow |\alpha|-|\beta|=0 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$

ΘΕΜΑ 2 _991

Αν ο πραγματικός αριθμός ***x*** ικανοποιεί τη σχέση: |***x+1***|***<2,***

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του ***x.***

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -2-1<x<2-1 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x \in (-3,1)$

β) Από την $-3<x<1$ παίρνουμε $-3<x \Leftrightarrow 0<x+3$ οπότε $|x+3|=x+3$, καθώς και

$x<1 \Leftrightarrow x-1<0$, οπότε $|x-1|=-(x-1)=-x+1$

Αρα $\mathrm{K}=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}=\dfrac{x+3-x+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ δηλαδή ο Κ είναι ίσος με σταθερό αριθμό, οπότε η τιμή του δεν εξαρτάται από την τιμή του *x.(ανεξάρτητος του x)*

ΘΕΜΑ 2_1009

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση Α γράφεται:

$$|3x-6|+2=|3(x-2)|+2\overset{\substack{\text{ιδιότητα}\\ |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|}}{=}|3||x-2|+2=3|x-2|+2$$

i) Αν $x\geq 2\Leftrightarrow x-2\geq 0\Leftrightarrow |x-2|\geq x-2$ οπότε

$$\mathrm{A}=3|x-2|+2=3(x-2)+2=3x-6+2=3x-4$$

ii) Αν $x\leq 2\Leftrightarrow x-2\leq 0\Leftrightarrow |x-2|\geq -(x-2)=2-x$ οπότε

$$\mathrm{A}=3|x-2|+2=3(2-x)+2=6-3x+2=8-3x$$

β) Αν $x\geq 2$ τότε όπως δείξαμε στο α) $3|x-2|+2=3x-4$.

$$\frac{9x^2-16}{3|x-2|+2}=\frac{9x^2-16}{3x-4}=\frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4}=3x+4$$

ΘΕΜΑ 2_1062

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με ***1<x<3*** και ***2<y<4***, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού *Ε* του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$

β) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x και y είναι $\mathrm{E}=xy$. Πρέπει λοιπόν να σχηματίσω από τις δοθείσες μια νέα διπλή ανισότητα που το μεσαίο μέλος να είναι xy.

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις δύο ανισότητες (μπορώ να το κάνω αφού όλα τα μέλη τους είναι θετικά)

$2<xy<12 \Leftrightarrow 2<\mathrm{E}<12$.

2_1074

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με 1<x<3 και 2<y<4, τότε να αποδείξετε ότι: *6<Π<14*, όπου *Π* είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$

β) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2x+2y$

$1<x<3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2<2x<6$

$2<y<4 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 4<2y<8$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$6<2x+2y<14 \Leftrightarrow 6<\Pi<14$

ΘΕΜΑ 2_1077

α) Να λύσετε την ανίσωση: |x-5|<4. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός **α** επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow -4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow \boxed{1<x<9}$

β)

$$1<\alpha<9 \Leftrightarrow 1<\alpha \text{ και } \alpha<9 \overset{\textit{εφαρμογή } 1i)\ σ.58}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1}>\frac{1}{\alpha} \text{ και } \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<1 \text{ και } \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1}$$

ΘΕΜΑ 2_1089 (2.3)

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $5 < x < 10 \Leftrightarrow 5 < x$ και $x < 10 \Leftrightarrow 0 < x-5$ και $x-10 < 0$

Αρα $|x-5| = x-5$ και $|x-10| = -(x-10)$

β) Η παράσταση είναι καλά ορισμένη αφού δεδομένου ότι $5 < x < 10$ οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

$$\mathrm{A} = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1-1 = 0$$

ΘΕΜΑ 2 1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη *x* και *y*, για τα οποία ισχύουν: |*x-3*|≤*2* και |*y-6*|≤*4*.

α) Να δείξετε ότι: *1≤x≤5* και *2≤y≤10*. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις *2x* και *y*

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $|x-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow -2+3 \le x-3+3 \le 2+3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

$|y-6| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le y-6 \le 4 \Leftrightarrow -4+6 \le y-6+6 \le 4+6 \Leftrightarrow 2 \le y \le 10$

β) Η περίμετρος είναι $\Pi = 2(2x)+2y = 4x+2y$

Από $1 \le x \le 5 \overset{\cdot 4}{\Rightarrow} 4\cdot 1 \le 4x \le 4\cdot 5 \Rightarrow 4 \le 4x \le 20$ (1)

Από $2 \le y \le 10 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2\cdot 2 \le 2y \le 2\cdot 10 \Rightarrow 4 \le 2y \le 20$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$4+4 \le 4x+2y \le 20+20 \Leftrightarrow 8 \le 4x+2y \le 40$

Αρα $8 \le \Pi \le 40$.

ΘΕΜΑ 2_1305

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $|x+4|\geq 3 \Leftrightarrow x+4\leq -3$ ή $x+4\geq 3 \Leftrightarrow x\leq -4-3$ ή $x\geq -4+3 \Leftrightarrow \boxed{x\leq -7 \text{ ή } x\geq -1}$.

β) Αφού το $\alpha \geq -1$ δηλαδή το α ανήκει στις λύσεις της ανίσωσης $|x+4|\geq 3$ *(δες α))* θα είναι

$|\alpha+4|\geq 3 \Leftrightarrow |\alpha+4|-3\geq 0$ οπότε από τον ορισμό της απόλυτης τιμής:

$A=||\alpha+4|-3|=|\alpha+4|-3$.

Επειδή $\alpha\geq -1 \Rightarrow \alpha+4\geq -1+4 \Rightarrow \alpha+4\geq 3>0$, άρα $|\alpha+4|=\alpha+4$.Αρα τελικά:

$A=\alpha+4-3=\alpha+1$

ΘΕΜΑ 2_2702

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x\in[2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Απο $2\leq x<3$ έχουμε $2\leq x \Rightarrow 2\cdot 2\leq 2x \Rightarrow 4\leq 2x \Rightarrow 0\leq 2x-4$ επομένως $A=|2x-4|=2x-4$

$2\leq x<3$ έχουμε $x<3 \Rightarrow x-3<0$ επομένως $B=|x-3|=-(x-3)=-x+3$.

Επομένως $A+B=2x-4-x+3=x-1$.

β) $A+B=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=1+2 \Leftrightarrow x=3$, επομένως δεν υπάρχει λύση στο $[2, 3)$.