2_936

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση *A* είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του *x*.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Η παράσταση ορίζεται για:

$$\left.\begin{matrix} x-4\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 4 \\ x\geq -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\geq 4$$

β) $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x-4-x-1=-5$

2_944

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για *x=5*,να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Η παράσταση ορίζεται για:

$$\left.\begin{matrix} x-4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 4 \\ 6\geq x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 4\leq x \\ x\leq 6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 4\leq x\leq 6$$

β) Για x=5 $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$

Αρα $A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$

2_947

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+4 \geq 4 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Αρα από την πρώτη ρίζα δεν προκύπτει περιορισμός.

Για να ορίζεται η δεύτερη ρίζα πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Αρα η παράσταση Α ορίζεται για $[4,+\infty)$.

β) Για x=4, $\mathrm{A}=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}-0=\sqrt{20}$

Αρα $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}=\left(\sqrt{20}\right)^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=20-\sqrt{4\cdot 5}=20-2\sqrt{5}=2\left(10-\sqrt{5}\right)$

ΘΕΜΑ 2_1276

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το *x*, ώστε η παράσταση *K* να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν -2<x<3, να αποδείξετε ότι παράσταση *K* σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός και οι υπόριζες ποσότητες μή αρνητικές.

$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

$x^2+4x+4 = (x+2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$x^2+4x+4 = (x+2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρα η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός των -2 και 3 ή με συμβολισμό συνόλων η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x \in \mathbb{R} - \{-2,3\}$.

β) $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}$

Αν $-2 < x < 3$ τότε $0 < x+2$ οπότε $|x+2| = x+2$ και $x-3<0$ οπότε $|x-3| = -(x-3) =$ οπότε:

$$K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{x-3}{x-3} = 1+1 = 2$$

2_3382

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: *A= 4*. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: |*x+A*|=*1*. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3+5}{5-3}=\dfrac{8}{2}=4$

β) $|x+4|=1 \Leftrightarrow x+4=1$ ή $x+4=-1 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=-5$.

ΘΕΜΑ 2 4314

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt{3}=5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{3}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{3}=5^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{3}=5^{\frac{3}{6}}\cdot\sqrt{3}=$

$5^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}$

β) Αφού οι Α και Β είναι θετικοί, συγκρίνω ισοδύναμα της 6^{ες} δυνάμεις τους:

$$A^6=\left(\sqrt[3]{5}\right)^6=\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right]^2=5^2=25$$

$$B^6=\left(\sqrt{3}\right)^6=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^3=3^3=27$$

Αφού $B^6>A^6 \overset{A,B>0}{\Leftrightarrow} B>A$

ΘΕΜΑ 2 4316

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $A\cdot B=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$

β) $\Pi=A^2+B^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2=2^2-\cancel{2\cdot2\sqrt{3}}+\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2+\cancel{2\cdot2\sqrt{3}}+\left(\sqrt{3}\right)^2=4+4+3+3=14$

ΘΕΜΑ 2 8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1,41$

$\sqrt{3} \cong 1,73$

$\sqrt{5} \cong 2,24$

$\sqrt{7} \cong 2,64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2\cdot 2,24 = 4,48$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3\cdot 2,24 = 6,72$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4\cdot 2,24 = 8,96$

β) $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$