ΜΙΑ ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=\lambda x^2-4x+\lambda-3$.Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει:

α. Δύο ρίζες (ίσες ή άνισες)

β. Δύο ρίζες ετερόσημες

γ. Δύο ρίζες ομόσημες

δ. Δύο ρίζες θετικές

ε. Δύο ρίζες που να πληρούν την σχέση $x_1+x_2>-1$

στ. Δύο ρίζες που να πληρούν την σχέση $x_1^2x_2+x_1x_2^2+16<0$

Λύση:

$\alpha=\lambda, \quad \beta=-4, \quad \gamma=\lambda-3$

α. Πρέπει

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\neq 0\\ \Delta\geq 0\end{array}\right\}$$

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow(-4)^2-4\lambda(\lambda-3)\geq 0\Leftrightarrow 16-4\lambda^2+12\lambda\geq 0\Leftrightarrow -4\lambda^2+12\lambda+16\geq 0\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1\leq\lambda\leq 4$$

Αρα $\left.\begin{array}{l}\alpha\neq 0\\ \Delta\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda\neq 0\\ -1\leq\lambda\leq 4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\boxed{\lambda\in[-1,0)\cup(0,4]}$ **(1)**

β. $\left.\begin{array}{l}\alpha\neq 0\\ \Delta\geq 0\\ P<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha\neq 0\\ \Delta\geq 0\\ \dfrac{\gamma}{\alpha}<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha\gamma<0$

Μερικές επεξηγήσεις επιβάλλονται:

► Κατ' αρχάς επειδή οι κανόνες προσήμου για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση είναι ίδιοι προφανώς δύο αριθμοί έχουν πηλίκο αρνητικό όταν και μόνο όταν το γινόμενό τους είναι θετικό. Αρα

$$\frac{\gamma}{\alpha}<0\Leftrightarrow\alpha\gamma<0$$

+ · + = +	+ : + = +
+ · − = −	+ : − = −
− · + = −	− : + = −
− · − = +	− : − = +

▶Γιατί ο περιορισμός $\alpha\gamma<0$ καλύπτει και τους περιορισμούς :

I) $\alpha \neq 0$ και

II) $\Delta \geq 0$;

Απάντηση:

I) Αφού $\alpha\gamma<0$ δεν μπορεί $\alpha=0$ γιατί τότε $\alpha\gamma=0$ άτοπο.

Η με άλλη απόδειξη:

• Αν γ>0 έχουμε: $\alpha\gamma<0 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \alpha<0$ οπότε και $\alpha \neq 0$

• Αν γ<0 έχουμε: $\alpha\gamma<0 \overset{\gamma<0}{\Leftrightarrow} \alpha>0$ οπότε και $\alpha \neq 0$

II) Οταν $\alpha\gamma<0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma>0$ **(i)**

$\beta^2 \geq 0$ **(ii)**

Προσθέτοντας κατά μέλη της **(i)** και **(ii)** παίρνουμε:

$\beta^2-4\alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \Delta>0$

$\mathrm{P}<0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}<0 \Leftrightarrow \alpha\gamma<0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)<0 \Leftrightarrow 0<\lambda<3 \Leftrightarrow \lambda \in (0,3)$ (2)

Παρατηρούμε ότι η συναλήθευση με την (1) δεν μειώνει το πεδίο λύσεων και έτσι βλέπουμε ότι πράγματι ο περιορισμός ο περιορισμός $\alpha\gamma<0$ εμπεριέχει τους $\alpha \neq 0$ καθώς $\Delta \geq 0$.

γ. $\left.\begin{matrix} \alpha \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \mathrm{P}>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha}>0 \end{matrix}\right\}$

Εχουμε δείξει στο **α.** ότι για να υπάρχουν δύο ρίζες πρέπει $\lambda \in [-1,0) \cup (0,4]$.

$\mathrm{P}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}>0 \Leftrightarrow \alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)>0 \Leftrightarrow \lambda<0$ ή $\lambda>3 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$ (3)

Αρα τελικά οι (1) και η (3) συναληθεύουν: $\lambda \in [-1,0) \cup (3,4]$

δ. $\alpha=\lambda, \quad \beta=-4, \quad \gamma=\lambda-3$

$$\left.\begin{matrix}\lambda\neq 0\\ \Delta\geq 0\\ \mathrm{P}>0\\ S>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha\neq 0\\ \Delta\geq 0\\ \dfrac{\gamma}{\alpha}>0\\ -\dfrac{\beta}{\alpha}>0\end{matrix}\right\}$$

Εχουμε δείξει στο **α.** ότι για να υπάρχουν δύο ρίζες πρέπει $\lambda\in[-1,0)\cup(0,4]$ (1)

Οπως δείξαμε στο **γ.** $\mathrm{P}>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ **(3)**

$$-\frac{\beta}{\alpha}>0\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}<0\Leftrightarrow\frac{-4}{\lambda}<0\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}>0\Leftrightarrow\lambda>0 \quad \textbf{(4)}$$

Αρα τελικά συναληθεύοντας τις (1), (3) και (4) έχουμε: $\lambda\in(3,4]$.

ε. Δύο ρίζες έχουμε όταν $\lambda\in[-1,0)\cup(0,4]$

$$x_1+x_2>-1\Leftrightarrow-\frac{\beta}{\alpha}>-1\Leftrightarrow\frac{4}{\lambda}>-1\Leftrightarrow\frac{4}{\lambda}+1>0\Leftrightarrow\frac{4+\lambda}{\lambda}>0\Leftrightarrow\lambda(\lambda+4)>0\Leftrightarrow\lambda<-4 \text{ ή } \lambda>0 \quad (5)$$

Αρα τελικά $\lambda\in(0,4]$ *(Η λύση παρόμοιων ανισώσεων ανήκει πλέον στην ύλη της Β Λυκείου)*

Σημείωση. Λογικό να έχουμε ευρύτερο διάστημα λ από την περίπτωση που οι ρίζες θετικές (δ.) οπότε $x_1+x_2>0$.

στ . Αρχικά πρέπει να υπάρχουν δύο ρίζες και όπως δείξαμε στο α αυτό συμβαίνει όταν

$\lambda \in [-1,0) \cup (0,4]$ **(1)**

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 16 < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 16 < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + 16 < 0 \Leftrightarrow 16 - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} < 0$$

$$\overset{\alpha^2>0}{\Leftrightarrow} 16\alpha^2 - \beta\gamma < 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 4(\lambda - 3) < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + \lambda - 3 < 0$$

$\alpha = 4, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 7}{8}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1+7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1-7}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

Αρα $4\lambda^2 + \lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda \in \left(-1, \ \frac{3}{4}\right)$ **(6)**

Συναληθεύοντας την (6) με την (1) έχουμε $\lambda \in (-1,0) \cup \left(0, \ \frac{3}{4}\right)$