ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 2

481, 483, 493, 496, 1007, 1093, 1275, 1298, 1533, 3839, 3847

που αναφέρονται σε:

- **Λύση β θμιας εξίσωσης**
- **Τύποι για το άθροισμα και γινόμενο ριζών**
- **Κατασκευή β θμιας όταν γνωρίζω το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.**

Προειδοποίηση: Πιθανόν να υπάρχουν λάθη στις λύσεις.Αν εντοπίσετε κάποιο ή έχετε κάτι να καλύτερο να προτείνετε παρακαλώ να μου το επισημάνετε.

2_481

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $\alpha = 1$

$\beta = -2\lambda$

$\gamma = 4(\lambda - 1)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda-2)^2$$

β) Επειδή $\Delta = 4(\lambda-2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Ειδικά άν $\lambda \neq 2$ είναι Δ>0 οπότε έχουμε 2 ρίζες άνισες ενώ αν λ=2 είναι Δ=0 οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα.

γ) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow -2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-4}{-2} \Leftrightarrow \lambda = 2$

2_483

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $|2x-1|=3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=1+3$ ή $2x=1-3 \Leftrightarrow 2x=4$ ή $2x=-2 \Leftrightarrow$

$x=\frac{4}{2}$ ή $x=\frac{-2}{2} \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

β) α=-1 και β=2

Αρα μας ζητείται να λύσουμε την $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-1$

2_493

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ ή $x=2-\sqrt{3}$

β) $x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

$x_1\cdot x_2=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$

2_496

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$ (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $\alpha = 1$

$\beta = 2\lambda$

$\gamma = 4(\lambda - 1)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$$

β) Επειδή $\Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Ειδικά άν $\lambda \neq 2$ είναι Δ>0 οπότε έχουμε 2 ρίζες άνισες ενώ αν λ=2 είναι Δ=0 οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα.

γ) $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{-2\lambda}{1} = -2\lambda$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{4(\lambda - 1)}{1} = 4(\lambda - 1)$

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

2_1007

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

(φέραμε όλους τους όρους στο 1^o μέλος ώστε να καθοριστεί σωστά το γ και ακολούθως κάναμε και μια απλοποίση διαιρώντας όλους τους όρους με -2.Με -2 και όχι με 2 για να έχουμε θετικό συντελεστή του x^2.)

$\alpha=1$

$\beta=-5$

$\gamma=6$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

β) Αρχικά κάνουμε τους περιορισμούς.Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός οπότε έχουμε: $x-2\neq0 \Leftrightarrow x\neq2$.Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αυτή που λύσαμε στο α) ερώτημα και βρήκαμε πως έχει ρίζες 3 και 2.Ομως λόγω του περιορισμού αποδεκτή λύση είναι μόνο η $x=3$.

2_1093

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

Λύση:

α) $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{5+5}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=\dfrac{10}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{10}{25-5}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=\dfrac{1}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{1}{25-5}=\dfrac{1}{20}$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$.

2_1275

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\alpha=2, \quad \beta=5, \quad \gamma=-1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot 2\cdot(-1)=25+8=33>0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{5}{2}$

$$x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{1}=5$$

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-5x+2=0$.

2_1298

Έστω *α, β* πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς *α, β* και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta=\frac{-30}{2}=-15$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$x^2-2x-15=0$

Η εξίσωση $x^2-2x-15=0$ έχει:

$\alpha=1, \quad \beta=-2, \quad \gamma=-15$, οπότε:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{2\pm8}{2}$$

$$x_1=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Αρα α=5 και β=-3 ή α=-3 και β=5

2_1533

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) Η εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$ έχει:

$\alpha=1, \quad \beta=2, \quad \gamma=\lambda-2$, οπότε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-2)=4-4(\lambda-2)=4-4\lambda+8=-4\lambda+12$$

Για να έχει πραγματικές ρίζες, πρέπει και αρκεί:

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda+12\geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda\geq -12 \Leftrightarrow \frac{-4\lambda}{-4}\leq\frac{-12}{-4} \Leftrightarrow \lambda\leq 3$$

β) $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2}{1}=-2$

$x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-2}{1}=\lambda-2$

2_3839

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Αν το -2 είναι ρίζα της εξίσωσης $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0,\ (\lambda\neq 0)$ θα έχουμε:

$$\lambda(-2)^2-(\lambda-1)(-2)-1=0 \Leftrightarrow 4\lambda+2(\lambda-1)-1=0 \Leftrightarrow 4\lambda+2\lambda-2-1=0 \Leftrightarrow 6\lambda-3=0 \Leftrightarrow 6\lambda=3$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

α) Η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0,\ (\lambda\neq 0)$ έχει:

$\alpha=\lambda,\quad \beta=-(\lambda-1)=1-\lambda,\quad \gamma=-1$, οπότε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(1-\lambda)^2-4\lambda(-1)=1-2\lambda+\lambda^2+4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

2_3847

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ έχει:

$\alpha=\lambda+2,\quad \beta=2\lambda,\quad \gamma=\lambda-1$, οπότε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda)^2-4(\lambda+2)(\lambda-1)=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-\lambda+2\lambda-2\right)=4\lambda^2-4\left(\lambda^2+\lambda-2\right)=$$

$$4\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda+8=-4\lambda+8$$

Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει και αρκεί:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow -4\lambda+8>0 \Leftrightarrow 4\lambda<8 \Leftrightarrow \lambda<2$$

β) $x_1+x_2=2 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow -\dfrac{2\lambda}{\lambda+2}=2 \Leftrightarrow -\dfrac{\lambda}{\lambda+2}=1 \Leftrightarrow -\lambda=\lambda+2 \Leftrightarrow -2\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=-1$