17ο Γενικό Λύκειο Αθηνών **Σχολικό Έτος 2014-15**

Τάξη: Α' Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Αθήνα 19-5-2015

Θέμα 1ο

Α. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 των ριζών αυτών,

τότε να αποδείξετε ότι: $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **Μονάδες 8**

Απόδειξη:

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

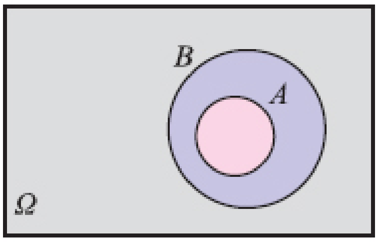
$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\cancel{+\sqrt{\Delta}}-\beta\cancel{-\sqrt{\Delta}}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Β. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω.

Να αποδείξετε ότι: Αν $A\subseteq B$, τότε $P(A)\leq P(B)$ **Μονάδες 7**

Απόδειξη:

Επειδή $A\subseteq B$ προφανώς ισχύει:



$N(A)\leq N(B)$ *διαιρούμε κατά μέλη με N(Ω)>0*

$\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}$ *κλασσικός άορισμός πιθανότητας*

$P(A)\leq P(B)$

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει $|\alpha+\beta| \le ....$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β. Αν θ>0 τότε ισχύει $|x| = \theta \Leftrightarrow$ .... ή ....

γ. Αν η διακρίνουσα Δ είναι ίση με το 0, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \ne 0$ έχει μια διπλή ρίζα την $x = ...$

δ. Αν η διακρίνουσα Δ είναι μεγαλύτερη από το 0, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \ne 0$ παραγοντοποιείται και γίνεται .... όπου $x_{1,}\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου

ε. Για οποιαδήποτε <u>ασυμβίβαστα</u> μεταξύ τοους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = ...$ **Μονάδες 5x2=10**

Απάντηση:

α. Ισχύει $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β. Αν θ>0 τότε ισχύει $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ **ή** $x = -\theta$.

γ. Αν η διακρίνουσα Δ είναι ίση με το 0, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \ne 0$ έχει μια διπλή ρίζα την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

δ. Αν η διακρίνουσα Δ είναι μεγαλύτερη από το 0, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \ne 0$ παραγοντοποιείται και γίνεται $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$. όπου $x_{1,}\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου.

ε. Για οποιαδήποτε <u>ασυμβίβαστα</u> μεταξύ τοους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$.

Θέμα 2ο

Η εμφάνιση μιας ομάδας μπάσκετ αποτελείται από φανέλα, σορτσάκι και κάλτσες.

- Η φανέλα μπορεί να είναι άσπρη (Α) ή κίτρινη (Κ) ή πράσινη (Π).
- Το σορτσάκι μπορεί να είναι γκρί (Γ) ή θαλασσί (Θ).
- Οι κάλτσες μπορεί να είναι μονόχρωμες (Μ) ή ριγέ (Ρ).

α. Να κάνετε το δεντροδιάγραμμα του παραπάνω πειράματος τύχης. **Μονάδες 5**

β. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος. **Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τα ενδεχόμενα Κ={η φανέλα είναι κίτρινη} και

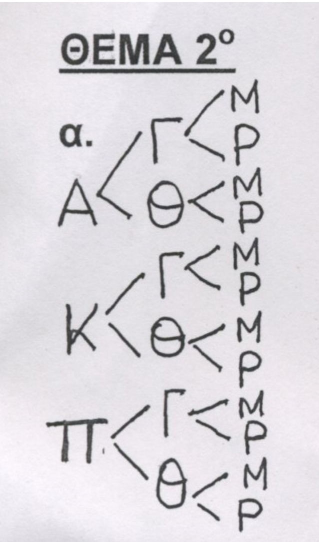
Μ={οι κάλτσες είναι μονόχρωμες} **Μονάδες 6**

δ. Αν όλα τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, να βρείτε τις πιθανότητες

$P(K\cap M)$ και $P(M-K)$. **Μονάδες 4+5=9**

Λύση:

α.



β. Ω={ΑΓΜ, ΑΓΡ, ΑΘΜ,ΑΘΡ, ΚΓΜ, ΚΓΡ, ΚΘΜ, ΚΘΡ, ΠΓΜ, ΠΓΡ, ΠΘΜ, ΠΘΡ}

γ. Κ={ ΚΓΜ, ΚΓΡ, ΚΘΜ, ΚΘΡ }

Μ={ΑΓΜ, ΑΘΜ, ΚΓΜ, ΚΘΜ, ΠΓΜ, ΠΘΜ}

δ. $K\cap M=\{K\Gamma M, K\Theta M\}$

$M-K=\{A\Gamma M,\ A\Theta M,\ \Pi\Gamma M,\ \Pi\Theta M\}$

Αφου τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας.Ετσι:

$$P(K\cap M)=\frac{N(K\cap M)}{N(\Omega)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} \quad \text{και} \quad P(M-K)=\frac{N(M-K)}{N(\Omega)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(2-\mu)x^2+(3+2\mu)x-\mu=0$ όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση για μ=2. **Μονάδες 5**

ii. Αν $\mu\neq 2$ να δείξετε ότι $\Delta=20\mu+9$ (Δ : διακρίνουσα) **Μονάδες 7**

iii. Για ποιές τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές; **Μονάδες 5**

iv. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε για ποιά τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει $x_1\cdot x_2=3$; **Μονάδες 8**

Λύση:

i. Για μ=2 η εξίσωση γίνεται:

$$(2-2)x^2+(3+2\cdot 2)x-2=0\Leftrightarrow$$

$0x^2+7x-2=0\Leftrightarrow$ *(μηδενίζεται ο δευτεροβάθμιος όρος και καταλήγουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού)*

$$7x-2=0\Leftrightarrow 7x=2\Leftrightarrow x=\frac{2}{7}.$$

ii. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(3+2\mu)^2-4(2-\mu)(-\mu)=3^2+2\cdot 3\cdot 2\mu+(2\mu)^2-4(-2\mu+\mu^2)=$

$$9+12\mu+\cancel{4\mu^2}+8\mu-\cancel{4\mu^2}=20\mu+9$$

iii. Δεν έχει ρίζες πραγματικές όταν :

$$\left.\begin{matrix}\mu-2\neq 0\\ \Delta<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\mu\neq 2\\ 20\mu+9<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\mu\neq 2\\ \mu<-\frac{9}{20}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\mu<-\frac{9}{20}\Leftrightarrow\mu\in\left(-\infty,-\frac{9}{20}\right).$$

Σημείωση: Να υπενθυμίσουμε ότι η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ως προυπόθεση $\alpha\neq 0$.

iv. Γνωρίζουμε ότι $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-\mu}{2-\mu}=\frac{\mu}{\mu-2}$

Αρα:

$$x_1\cdot x_2=3\Leftrightarrow\frac{\mu}{\mu-2}=3\Leftrightarrow\mu=3(\mu-2)\Leftrightarrow\mu=3\mu-6\Leftrightarrow\mu-3\mu=-6\Leftrightarrow-2\mu=-6\Leftrightarrow 2\mu=6\Leftrightarrow\mu=\frac{6}{2}=3$$

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$.

i. Να δείξετε ότι $\Delta = 4 - 4\lambda^2$ (Δ: διακρίνουσα) **Μονάδες 5**

ii.Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες έχουμε $\Delta < 0$. **Μονάδες 5**

iii.Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση

$\lambda x^2 - 2x + \lambda \leq 0$, $\lambda \neq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

iv. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές; **Μονάδες 5**

v. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ τότε για ποιές τιμές του λ ισχύει:

$$|4 - \Delta| = \frac{20}{x_1 + x_2} - 4(x_1 \cdot x_2)^{2015}$$ **Μονάδες 5**

Λύση:

i. $\alpha = \lambda$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$'

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\lambda\lambda = 4 - 4\lambda^2$$

ii. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^2 < 0$

Το τριώνυμο $1 - \lambda^2$ *(είναι τριώνυμο με μηδενικό μέσο όρο)* έχει ρίζες -1 και 1 και ο συντελεστής **α** του δευτεροβάθμιου όρου (συντελεστής του λ^2) είναι **α=** −1<0.Εμείς αναζητούμε τα λ για τα οποία το τριώνυμο γίνεται αρνητικό δηλαδή ομόσημο του **α.**Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει για τα λ εκτός των ριζών.Αρα:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 1 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

iii. Θέλουμε το τριώνυμο να γίνεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρνητικό ή 0.Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο γίνεται ομόσημο του α ή 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $\Delta \leq 0$.Από το ii. συμπεραίνω ότι

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \text{ ή } \lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$ **(1)**

Επειδή εμείς θέλουμε ειδικά να είναι αρνητικό ή 0 πρέπει επιπλέον το α<0 δηλαδή $\alpha < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$ **(2).**

Η συναλήθευση των **(1)** και **(2)** δίνει ως απάντηση $\lambda \in (-\infty, -1]$.

iv.

$$\left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ 4 - 4\lambda^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ -1 \leq \lambda \leq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

Σημείωση: Η ανίσωση $1 - \lambda^2 \geq 0$ λύνεται είτε με βάση το πρόσημο τριωνύμου **ή** ως εξής:

$$1 - \lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} \leq \sqrt{1} \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$$

v. Για την εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + \lambda = 0$ με $\alpha = \lambda$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$ έχουμε:

$\Delta = 4 - 4\lambda^2$, $\quad x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2}{\lambda}$, $\quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$

Αρα:

$$|4-\Delta| = \frac{20}{x_1 + x_2} - 4(x_1 \cdot x_2)^{2015} \Leftrightarrow \left|4-\left(4-4\lambda^2\right)\right| = \frac{20}{\frac{2}{\lambda}} - 4\cdot 1^{2015} \Leftrightarrow \left|4-4+4\lambda^2\right| = \frac{20\lambda}{2} - 4\cdot 1 \Leftrightarrow \left|4\lambda^2\right| = 10\lambda - 4$$

$$4\lambda^2 = 10\lambda - 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2'$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Επειδή όπως δείξαμε στο iv πραγματικές ρίζες έχουμε μόνο για $\lambda \in [-1,0) \cup (0,1]$, δεκτή λύση είναι μόνο το $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ο Διευθυντής

Χαράλαμπος Καρούσος

Οι εισηγητές

Νίκος Καρακάσης

Δημήτρης Αθανασίου