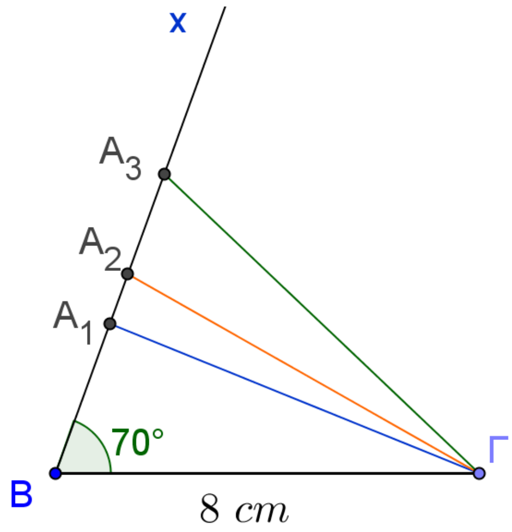
1ο μάθημα τρίγωνα ΛΥΣΕΙΣ (version 10-12-2016)



- Ορισμοί
- Κατασκευάστε τρίγωνα με πλευρά 8 και μια από τις γωνίες που έχουν κορυφή το άκρο αυτής της πλευράς (προσκείμενη) να είναι 70° (μοίρες) .Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορείτε να κατασκευάσετε;

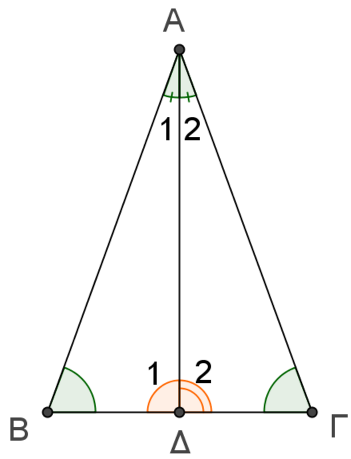
Απάντηση:

Φαίνεται από το σχήμα ότι για κάθε σημείο της ημιευθείας Bx (εκτός του Β) υπάρχει και ένα τρίγωνο (άπειρα λοιπόν).Αρα μια πλευρά και μια προσκείμενη γωνία δεν αρκούν να προσδιορίσουν με μοναδικό τρόπο ένα τρίγωνο.Ομως αν θέλουμε η πλευρά ΒΑ να έχει συγκεκριμένο μήκος, τότε το τρίγωνο είναι **μοναδικό**.Ετσι κατασκευαστικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα (ή καλύτερα εικασία) ότι:

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ) *(Πρόταση 4 στα Στοιχεία του Ευκλείδη)*

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι



Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη:

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ . Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma} \\ \hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2 \\ \mathrm{A\Delta}\ \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα}$$

στοιχεία τους ίσα $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$

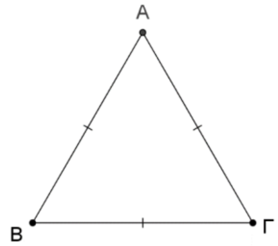
Από την ίδια ισότητα τριγώνων παίρνουμε ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος.

Επίσης ότι $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=180°$ προκύπτει $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Απόδειξη:



Εστω ισόπλευρο ΑΒΓ.

Αφού ΑΒ=ΑΓ από το προηγούμενο Πόρισμα Ι θα ισχύει $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ **(1)**

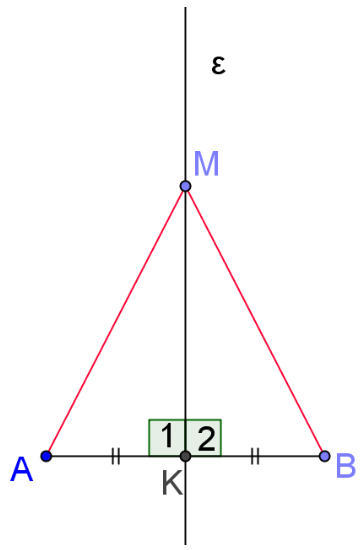
Αφού ΒΑ=ΒΓ από το προηγούμενο Πόρισμα Ι θα ισχύει $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει το ζητούμενο $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}$

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη:



Εστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ και Μ ένα (τυχαίο) σημείο της.Ενώνω το Μ με τα Α και Β.

Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν:

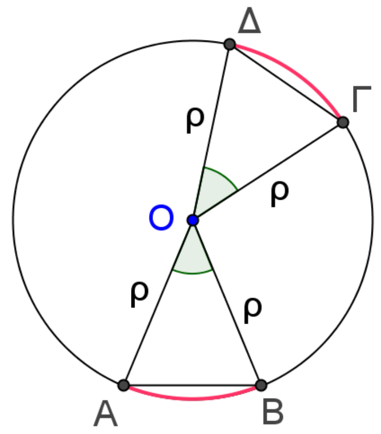
$$\left.\begin{array}{l} KA=KB \\ \hat{K}_1=\hat{K}_2=90^\circ \\ MK\ \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα:

$MA=MB$ δηλαδή το Μ ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.



Απόδειξη:

Εστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο **ίσα** τόξα ενός κύκλου (Ο, ρ)

Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, και ΟΔ.

Τότε αφού τα τόξα είναι ίσα και οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά θα είναι ίσες δηλαδή $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$ *(§2.18 Θεώρημα Ι)*

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} OA = O\Gamma(=\rho) \\ OB = O\Delta(=\rho) \\ A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Π-Γ-Π είναι ίσα, οπότε ΑΒ=ΓΔ δηλαδή και οι χορδές των τόξων είναι ίσες.