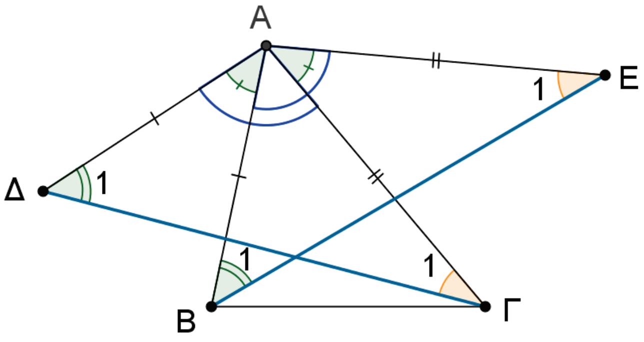
3.1-3.2 2ο φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ (Version 22-10-2016)

Ε1.Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ, ώστε $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{A}E}$.
Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} \text{ από τα δεδομένα} \\ \mathrm{B\hat{A}E} = \hat{\mathrm{A}} + \mathrm{\Gamma\hat{A}E} = \hat{\mathrm{A}} + \mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} \\ \mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma} \text{ από τα δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

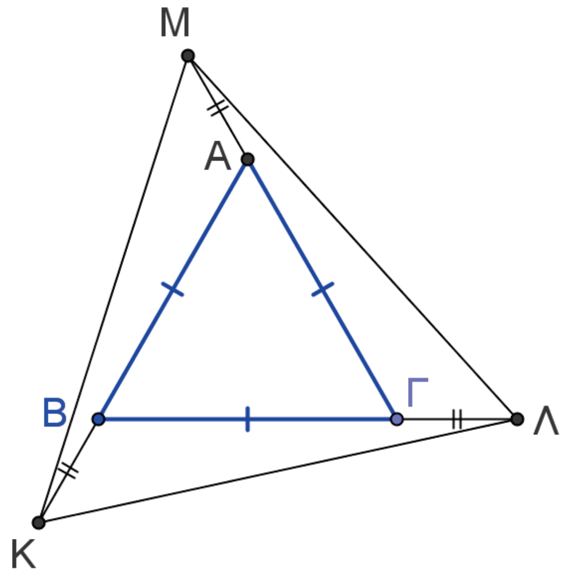
Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΒΕ=ΓΔ.

<u>*Σημείωση*</u>: Απο την ισότητα των τριγώνων παίρνουμε και τις παρακάτω ισότητες γωνιών που γράφουμε απλώς για εξάσκηση στην καταγραφή των όλων των ισοτήτων πλευρών και γωνιών που προκύπτουν από σύγκριση τριγώνων.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 \\ \hat{\Gamma}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \end{array}\right\}$$

Σημείωση: *Σε παλιότερη έκδοση του σχολικού υπάρχει αναντιστοιχία στην εκφώνηση της Ε1 και της λύσης στο λυσάρι.Είναι διαφορετικές ασκήσεις***.**

Ε2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.



Λύση:

- Αφού το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ
- Επίσης από τα δεδομένα

ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ

- Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες αυτές έχουμε:

ΑΒ+ ΒΚ =ΒΓ+ ΓΛ =ΑΓ+ ΑΜ ή

ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ

- Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες ισοπλεύρου είναι ίσες (Πόρισμα ΙΙ)

(*Δεν γνωρίζουμε ακόμα ότι οι γωνίες ισοπλεύρου είναι 60 μοίρες Πρέπει να περιμένουμε πρώτα να αποδείξουμε στο 4ο κεφάλαιο ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 μοίρες).*

Αρα και οι παραπληρωματικές τους θα είναι ίσες.

(Για όποιον θέλει πιο αλγεβρικό χειρισμό:

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow -\hat{A} = -\hat{B} = -\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 180° - \hat{A} = 180° - \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow M\hat{A}K = K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M$)

► Τα τρίγωνα ΜΑΚ, ΚΒΛ, ΓΛΜ έχουν:

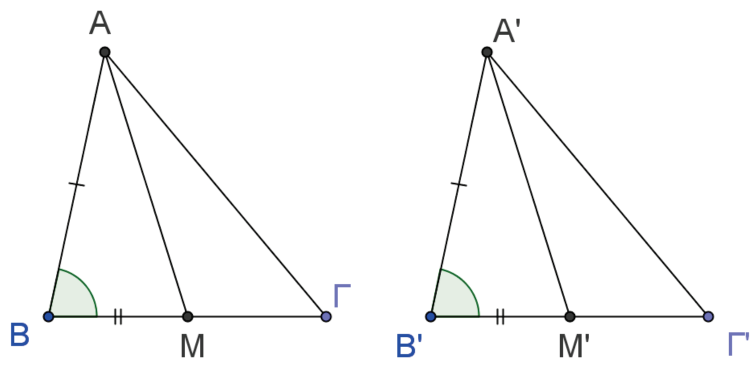
$$\left.\begin{array}{l} AM = BK = \Gamma\Lambda \\ M\hat{A}K = K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M \\ AK = B\Lambda = \Gamma M \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Ε3.Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

Λύση:

Εστω δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ με:

$$\left.\begin{aligned} &AB = A'B' \\ &A\Gamma = A'\Gamma' \\ &B\Gamma = B'\Gamma' \\ &\hat{A} = \hat{A}' \\ &\hat{B} = \hat{B}' \\ &\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \end{aligned}\right\}$$



Φέρνουμε τις διαμέσους ΑΜ και Α’Μ΄ που αντιστοιχούν στις ομόλογες πλευρές ΒΓ και Β’Γ’.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α’Β’Μ’.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{aligned} &AB = A'B' \\ &\hat{B} = \hat{B}' \\ &BM = B'M' \text{ ως μισά των ίσων πλευρών } B\Gamma \text{ και } B'\Gamma' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

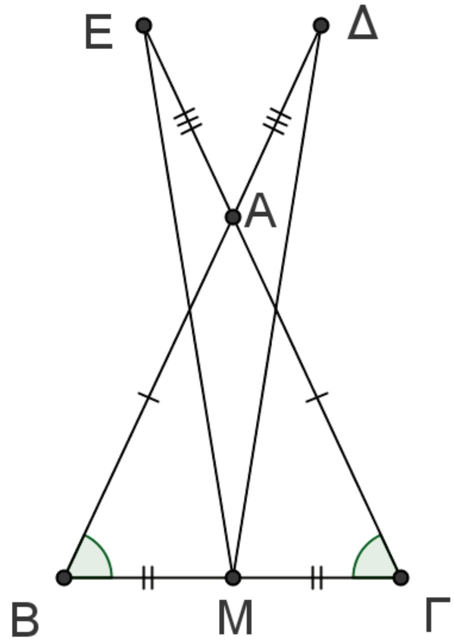
Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. οπότε και ΑΜ=Α’Μ’.

Παρόμοια μπορούμε να δουλέψουμε ώστε να δείξουμε την ισότητα και των άλλων διαμέσων.

Σχόλιο: Αν και όχι ιδιαίτερα δύσκολη είναι βασική με την έννοια ότι κάτι ανάλογο ισχύει για ύψη και διχοτόμους και είναι καλό να ξέρουμε ότι δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσα και τα δευτερεύοντα στοιχεία τους.

Α2.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση:



Αρκεί να δείξουμε ότι ΜΔ=ΜΕ.

Ετσι βρίσκω δύο τρίγωνα που να έχουν ως πλευρές τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ και θα δείξω ότι είναι ίσα.

Θεωρώ τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ.

Επειδή το ΑΒΓ ισοσκελές θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (Πόρισμα Ι)

ΒΔ=ΑΒ+ΑΔ=ΑΓ+ΕΑ=ΓΕ

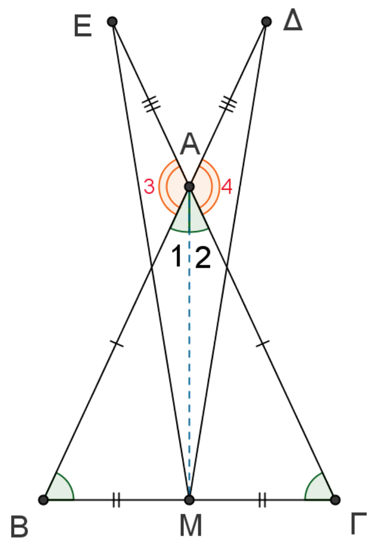
Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

$$\left.\begin{aligned} MB &= M\Gamma \\ \hat{B} &= \hat{\Gamma} \\ B\Delta &= \Gamma E \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Σημειώσεις:

Αφού πρέπει να εντοπίσω τρίγωνα με πλευρά ΜΕ και ΜΔ προφανώς δύο κορυφές είναι δεδομένες, οι Μ, Ε και Μ και Δ αντίστοιχα.

►**Με πιο κάτω θεωρία** :



Φέρνω την ΑΜ.Επειδή είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι και διχοτόμος οπότε

$\hat{A}_1=\hat{A}_2$

$\hat{A}_3=\hat{A}_4$ ως κατακορυφήν

Αρα και $E\hat{A}M=\hat{A}_1+\hat{A}_3=\hat{A}_2+\hat{A}_4=\Delta\hat{A}M$

ΜΕΑ=ΜΔΑ

Τα τρίγωνα ΜΕΑ και ΜΔΑ έχουν:

$$\left.\begin{aligned} &A\Delta = AE \text{ δεδομένα} \\ &E\hat{A}M = \Delta\hat{A}M \\ &AM \text{ κοινή} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

2^ος^ τρόπος

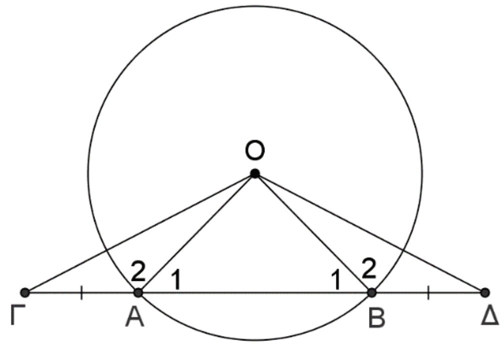
Φέρουμε ΕΒ και ΔΓ και δείχνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΓ οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ με πρόσθεση κατά μέλη $E\hat{B}M = \Delta\hat{\Gamma}M$ οπότε τα τρίγωνα ΕΒΜ και ΔΓΜ είναι ίσα και από την ισότητα τριγώνων ΜΕ=ΜΔ.

Α3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.

Λύση:

Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου

▪ Επειδή ΟΑ=ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ως προσκείμενες στην βάση του *(§ 3.2 Πόρισμα Ι).* Αρα θα είναι ίσες και οι παραπληρωματικές τους: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$



▪ Τα τρίγωνα ΟΑΓ, και ΟΒΔ λοιπόν έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \text{ ως ακτίνες κύκλου} \\ \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ A\Gamma = B\Delta \text{ από κατασκευή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.

<u>**Β τρόπος**</u> *(με χρήση μεταγενέστερης θεωρίας)*

Εστω Ε το μέσο της χορδής ΑΒ.Φέρνω τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ καθώς και την ΑΕ.Αφού ΟΑ=ΟΒ ως ακτίνες κύκλου το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και η ΟΕ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση, άρα θα είναι και ύψος.Αφού ΕΑ=ΕΒ και ΑΓ=ΒΔ θα είναι και ΕΓ=ΕΔ ως αθροίσματα ίσως τμημάτων.Αρα στο τρίγωνο ΟΓΔ το ΑΕ είναι και ύψος και διάμεσος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες δηλαδή $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$