Υπολογισμός της διαφοράς ΜΑ-ΜΒ όταν στο $+\infty$ και στο $-\infty$ με όρια και γραφικά (εικασία)

Εστω τα σημεία Α(α,β) και Β(γ,δ) και Μ(x, 0) ένα σημείο του άξονα των x.

Τότε:

$$\mathrm{AM}-\mathrm{BM}=\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}\right)\left(\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}\right)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}$$

$$=\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2-\left((x-\gamma)^2+\delta^2\right)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}=\frac{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-\left(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2\right)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}$$

$$=\frac{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-x^2+2\gamma x-\gamma^2-\delta^2}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}=\frac{-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2+2\gamma x-\gamma^2-\delta^2}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}$$

$$=\frac{2(\gamma-\alpha)x+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\delta^2}}$$

$$=\frac{2(\gamma-\alpha)x+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{\sqrt{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2}}=\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2\gamma}{x}+\dfrac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}\right)}}$$

$$\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{|x|\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\dfrac{2\gamma}{x}+\dfrac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}}=\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{|x|\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\dfrac{2\gamma}{x}+\dfrac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}}$$

$$\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2\gamma}{x}+\dfrac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}$$

- Αν x τείνει στο σύν άπειρο τότε περιοριζόμενοι στους θετικούς έχουμε:

$$\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{x\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}=\frac{2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}=\frac{2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}}=\frac{2(\gamma-\alpha)+0}{1+1}=\frac{2(\gamma-\alpha)}{2}=\gamma-\alpha$$

Ανάλογα με την σχετική θέση των σημείων Α και Β το όριο είναι θετικός ή αρνητικός.

- Αν x τείνει στο μείον άπειρο ($-\infty$), τότε περιοριζόμενοι στους αρνητικούς έχουμε:

$$\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}=\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}=$$

$$\frac{2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}=\frac{2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}}=\frac{2(\gamma-\alpha)+0}{-(1+1)}=\frac{2(\gamma-\alpha)}{-2}=\alpha-\gamma$$

Η τελευταία παράσταση τείνει στο $\frac{x\left[2(\gamma-\alpha)+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{x}\right]}{x\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{x}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{x^2}}\right)}=\frac{2(\gamma-\alpha)}{2}=\gamma-\alpha$

Ανάλογα με την σχετική θέση των σημείων Α και Β το όριο είναι θετικός ή αρνητικός.

Σημείωση 1:Μπορούμε και γραφικά να εικάσουμε το όριο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα που τα Α και Β είναι εκατέρωθεν του άξονα των x.

Αν με κέντρο το Μ φέρουμε τον κύκλο (Μ, ΜΒ) τότε αυτός τέμνει το ΑΜ στο Τ οπότε

ΜΑ-ΜΒ=ΜΑ-ΜΤ=ΑΤ

Οσο το Μ απομακρύνεται προς το σύν άπειρο ο κύκλος τίνει να γίνει ευθεία και το ΑΤ φαίνεται να τείνει στην διαφορά των τετμημένων x(B)-x(A).

Σημείωση 2 : Οταν σχεδίασα την ευθεία y=d(A,B) φαινόταν σαν ασύμπτωτη κι έτσι πίστευα ότι το όριο θα είναι το d(A, B).

Αντίθετα σχεδιάζοντας τον σχεδιάζοντας κύκλο είκαζα ότι το όριο είναι την απόσταση των τετμημένων.

Σχεδίασα και την ευθεία y= x(B)-x(A) και δεν φαινόταν για ασύμπτωτη.

Ομως μετακινούμενος στο Geogebra προς τα δεξιά είδα ότι έχει μέγιστο d(A,B) και μετά φθίνει (κάνει εκεί μια αδιόρατη κούρμπα) και όντως η y= x(B)-x(A) είναι η ασύμπτωτη.

Μην μπερδεύουμε την μέγιστη τιμή της διαφοράς που παίρνει για μια συγκεκριμένη θέση του Μ και τι γίνεται όταν πάμε στο άπειρο.