1^o φυλλάδιο Ανισοτικές σχέσεις ΛΥΣΕΙΣ *(version 3-11-2016)*

●Ορισμός, συμβολισμός και αναγνώριση εξωτερικής γωνίας και απέναντι εσωτερικών.

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα *(Πρόταση **I 16** στα Στοιχεία του Ευκλείδη)*

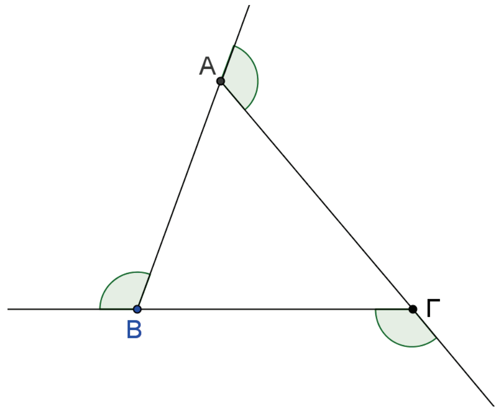
Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου

Συμπληρώστε τα κενά

$\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$ και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$

$\hat{B}_{\varepsilon\xi} >$ ..... και $\hat{B}_{\varepsilon\xi} >$ .....

$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} >$ ..... και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} >$ .....



Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

$B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

Απόδειξη (6 γραμμές)

Έστω Δ το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ.

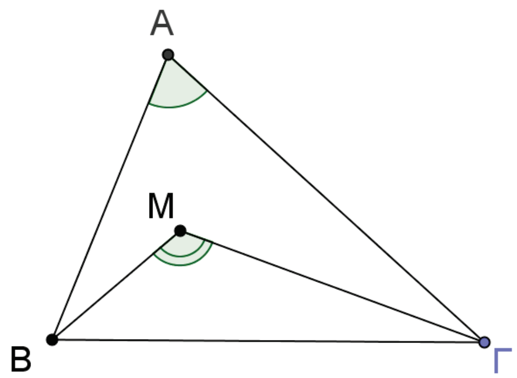
Η γωνία $B\hat{M}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως

$B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$.

Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι

$\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$.

Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των $180°$. *(Πρόταση I 17 στα Στοιχεία του Ευκλείδη)*

Απόδειξη: *(4 γραμμές)*

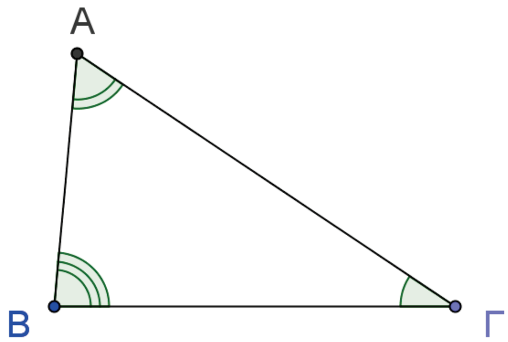
(i) Εστω ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή ή αμβλεία.Τότε η $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ που είναι παραπληρωματική της θα είναι ορθή ή οξεία δηλαδή $\hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$.Αλλά $\hat{A} < \hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$ δηλαδή $\hat{A} < 90°$ και $\hat{\Gamma} < \hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$ δηλαδή $\hat{\Gamma} < 90°$.

(ii) Ας δείξουμε ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180°$

Είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180° - \hat{B} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180° > \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180°$

§3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών.

Θεώρημα



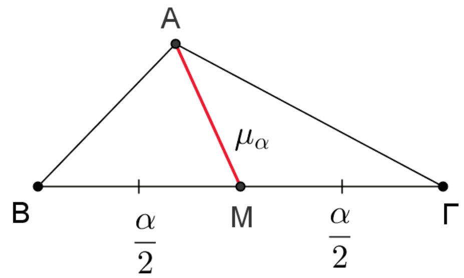
● **Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες** **(Ευθύ)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$, τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

● **Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται όμοια άνισες πλευρές** **(Αντίστροφο)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και β>γ .

Α1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \dfrac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$.



Λύση:

● Από την $\mu_\alpha < \dfrac{\alpha}{2}$, προκύπτει ότι:

▪ στο τρίγωνο ΑΜΒ

έχουμε ΑΜ<ΒΜ οπότε (*§3.11 Θεώρημα)* παίρνουμε $\hat{B} < \hat{A}_1$ **(1)**

▪ στο τρίγωνο ΑΜΓ

έχουμε ΑΜ<ΜΓ οπότε (*§3.11 Θεώρημα)* παίρνουμε $\hat{\Gamma} < \hat{A}_2$ **(2)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει : $\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$.

Πόρισμα (ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: *4 γραμμές*

Εστω $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Αν ήταν $\beta > \gamma$ θα είχαμε *(Θεώρημα § 3.11)* $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, άτοπο.

Επίσης αν ήταν $\beta < \gamma$ θα είχαμε *(Θεώρημα § 3.11)* $\hat{B} < \hat{\Gamma}$, άτοπο.

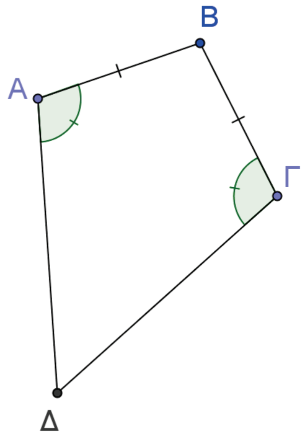
Αρα β=γ.

ΣΧΟΛΙΟ
*Το διπλανό πόρισμα **(ii)** είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής:*
Ενα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

Σημείωση: Για την μέθοδο «απαγωγή σε άτοπο» (reductio ad absurdum λατινιστί) δείτε και το βιβλίο άλγεβρας Μέθοδοι απόδειξης

Ε2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

Λύση: 5 γραμμές



Πόρ. (iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.