

1^ο φυλλάδιο Ανισοτικές σχέσεις (version 3-11-2016)

• Ορισμός, συμβολισμός και αναγνώριση εξωτερικής γωνίας και απέναντι εσωτερικών.

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα (Πρόταση I 16 στα Στοιχεία του Ευκλείδη)

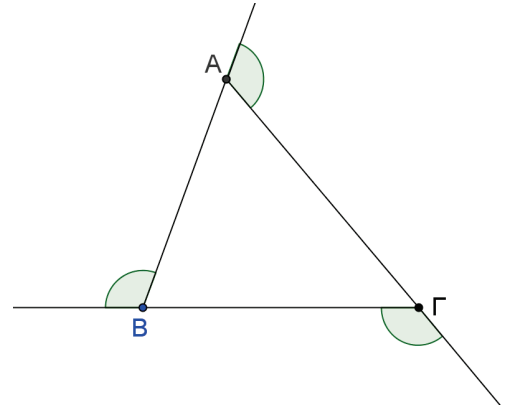
Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου

Συμπληρώστε τα κενά

$$\hat{A}_{εξ} > \hat{B} \quad \text{και} \quad \hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$$

$$\hat{B}_{εξ} > \dots \quad \text{και} \quad \hat{B}_{εξ} > \dots$$

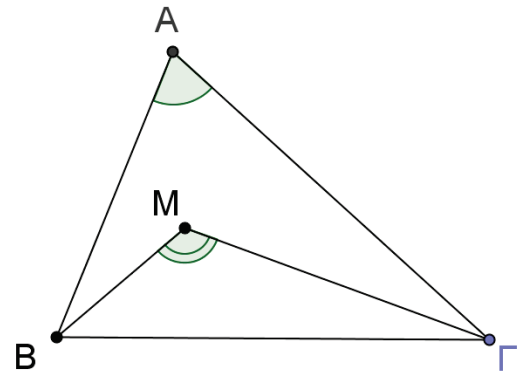
$$\hat{\Gamma}_{εξ} > \dots \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}_{εξ} > \dots$$



Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

$$\widehat{B\Gamma M} > \hat{A}.$$

Απόδειξη (6 γραμμές)



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° . (Πρόταση I 17 στα Στοιχεία του Ευκλείδη)

Απόδειξη: (4 γραμμές)

§3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών.

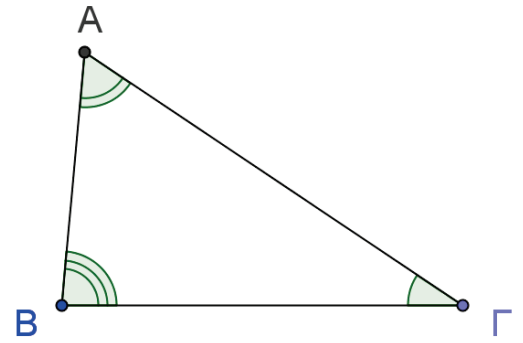
Θεώρημα

- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες (Ευθύ)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$, τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

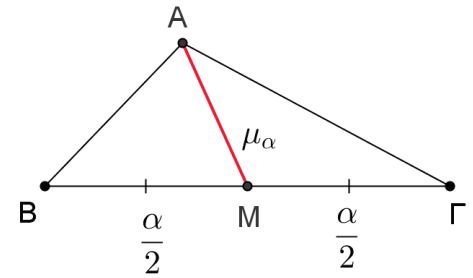
- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται όμοια άνισες πλευρές (Αντίστροφο)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$.



A1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

Λύση:



Πόρισμα (ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: 4 γραμμές

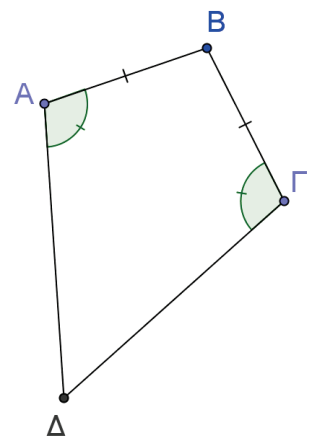
ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής:
Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

Σημείωση: Για την μέθοδο «απαγωγή σε άτοπο» (*reductio ad absurdum* λατινιστί) δείτε και το βιβλίο *άλγεβρας Μέθοδοι απόδειξης*

E2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν $AB = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Gamma\Delta$. Τι συμπεραίνετε για τη $B\Delta$;

Λύση: 5 γραμμές



Πόρ. (iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.