3.3-3.4 3ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΛΥΣΕΙΣ (15-12-2016)

§3.3-3.4 Εφαρμογή 1η σχολικό

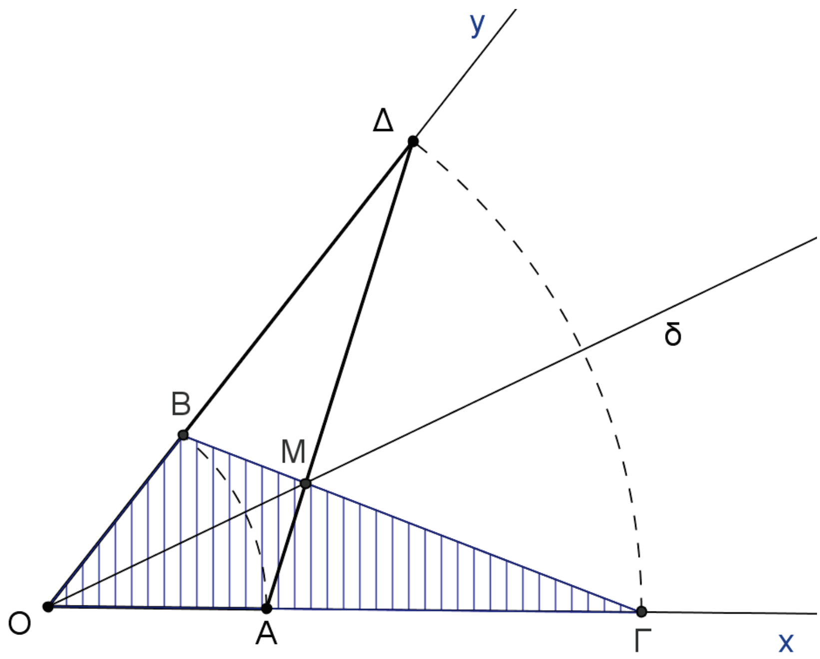
Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (Ο,ρ), (Ο, R) με ρ<R. Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα Α, Β ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ να αποδειχθεί ότι:

i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα

ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα

iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα

iv) η ΟΜ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.



Παρατήρηση: *Σε κάθε σύγκριση τριγώνων να γράφετε τις ισότητες όλων των αντίστοιχων στοιχείων που μας δίνει.*

ΛΥΣΗ:

i) Τα τρίγωνα **ΟΑΔ** και **ΟΒΓ** έχουν:

1. ΟΑ=ΟΒ *(ως ακτίνες του κύκλου (Ο,ρ))*

2. ΟΔ=ΟΓ *(ως ακτίνες του κύκλου (Ο, R))*

3. $\hat{O}$ κοινή

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

4. ΑΔ=ΒΓ

5. $O\hat{\Delta}A = O\hat{\Gamma}B$

6. $O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$

Σημείωση: Η αρίθμηση δεν είναι απαραίτητη αλλά την έχω βάλει για να τονιστεί το γεγονός ότι χρειαζόμαστε την ισότητα 3 κυρίων (πλευρές και γωνίες) στοιχείων του τριγώνου για να πάρουμε την ισότητα των τριγώνων και από την ισότητα των τριγώνων προκυπτει, απορρέει και η ισότητα των υπόλοιπων 3 κύριων στοιχείων του τριγώνου.

Φυσικά ένα τρίγωνο έχει 6 κύρια στοιχεία 3 πλευρές + 3 γωνίες

ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν:

1. ΑΓ=ΟΓ − ΟΑ=ΟΔ − ΟΒ=ΔΒ

2. $O\hat{\Delta}A = O\hat{\Gamma}B$ από το **i)**

3. $M\hat{A}\Gamma = 180^\circ - O\hat{A}\Delta \overset{i)}{=} 180^\circ - O\hat{B}\Gamma = M\hat{B}\Delta$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π είναι ίσα και επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

4. ΑΜ=ΒΜ

5. ΜΓ=ΜΔ

6. $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$ *(που έτσι κι αλλιώς είναι ίσες ως κατακορυφή)*

iii) Τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. ΟΑ=ΟΒ *(ως ακτίνες του κύκλου (Ο,ρ))*

2. ΟΜ κοινή

3. ΑΜ=ΒΜ *(από το ερώτημα ii)*

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα και επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είσα δηλαδή:

4. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

5. $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

6 . $O\hat{A}M = O\hat{B}M$

iv) Από την $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Εφαρμογή 2

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β=β΄, γ=γ΄ και $\mu_\beta=\mu_{\beta'}$.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

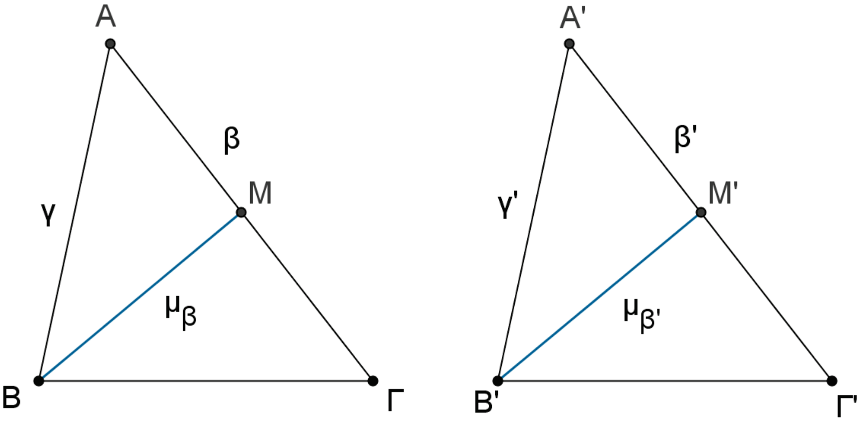
Λύση:

● Αφού β=β΄ θα είναι και τα μισά τους ίσα δηλαδή $\mathrm{AM} = \mathrm{A'M'}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄ Β΄Μ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \gamma' \text{ δεδομένα} \\ \mu_\beta = \mu_{\beta'} \text{ δεδομένα} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{A'M'} \text{ όπως δείξαμε} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Π-Π}$$

είναι ίσα, άρα θα είναι και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$



● Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ Β΄ Γ΄ έχουν:

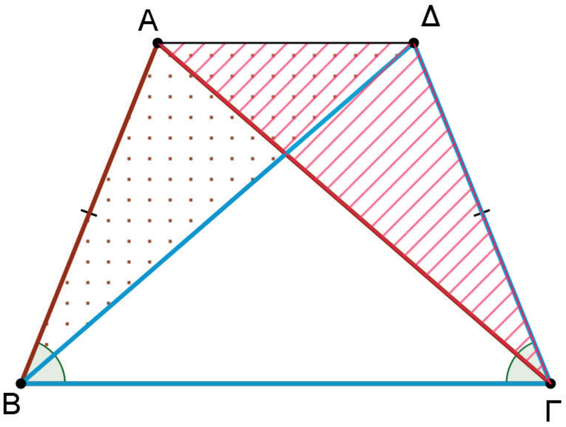
$$\left.\begin{array}{l} \beta = \beta' \text{ δεδομένα} \\ \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}' \text{ όπως δείξαμε} \\ \gamma = \gamma' \text{ δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.}$$

Σημειώσεις από την διδασκαλία: *Ενα παιδί επεσήμανε ένα λάθος γράμμα στο σχήμα (είχα Β αντί Α΄ στο 2ο τρίγωνο).Το καταγράφω γιατί αν και δεν φαίνεται σημαντικό δείχνει πως πολλά μάτια όταν αφηρημένα κυττάνε κάτι μπορεί να μην εντοπίσουν ένα λάθος που η αυξημένη παρατηρητικότητα κάποιου μπορεί να δεί.Το γράφω δηλαδή ως έπαινο στην παρατηρητικότητα η οποία είναι αρετή και πέραν του σχολείου.*

Α3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΓΔ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\hat{A}=\hat{\Delta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ΑΔ // ΒΓ. *(προσθήκη μου, απαιτεί πιο κάτω γνώσεις)*



Λύση:

i) *Σκέψη: Σκέφτομαι να δημιουργήσω δύο τρίγωνα που να έχουν γωνίες τις $\hat{A}=\hat{\Delta}$ και να τα συγκρίνω*

Φέρνω λοιπόν τις διαγωνίους ΔΒ και ΑΓ.

- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB=\Gamma\Delta \text{ δεδομένα} \\ \hat{B}=\hat{\Gamma} \text{ δεδομένα} \\ B\Gamma \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και}$$

ΑΓ=ΒΔ.

- Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΑ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta \text{ κοινή} \\ AB=\Gamma\Delta \\ B\Delta=A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Pi\Pi \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και } \hat{A}=\hat{\Delta}.$$

ii) Είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ από τα δεδομένα και $\hat{A}=\hat{\Delta}$ όπως δείξαμε στο i). Θα μάθουμε στο 4^{ο} κεφάλαιο (που ίσως είναι ήδη γνωστό) ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 360° *(§4.8)*.

Αρα:

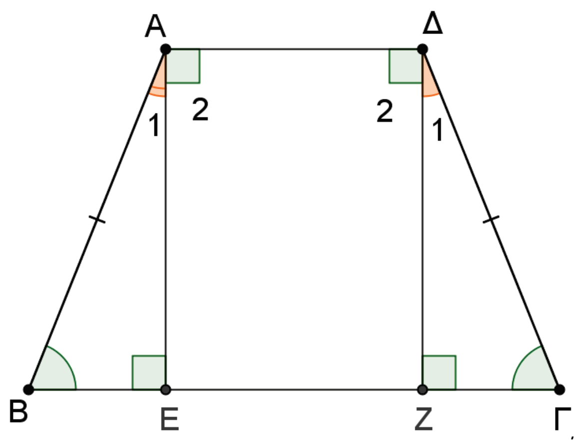
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{B}+\hat{A}=360^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}+2\hat{B}=360^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}=180^\circ$$

Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ, τεμνόμενες από την ΑΒ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα είναι ΑΔ // ΒΓ *(§4.2 Πόρισμα Ι)*

Σημειώσεις από την διδασκαλία

12-10-2016

Κάποιο παιδί μου είπε να φέρουμε από τα Α και Δ τις κάθετες ΑΕ και ΔΖ στην ΒΓ αντίστοιχα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΑ που σχηματίζονται είναι ίσα αφού ΑΒ=ΔΓ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$ και επειδή οι ορθές ίσες, δηλαδή $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_2$, θα είναι και $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ίσες ως αθροίσματα ίσων γωνιών.



Αρχικά να πούμε ότι είναι μια ωραία ιδέα και προς στιγμή αναρωτήθηκα αν ήταν μια λύση που απλώς δεν είχαμε σκεφτεί.

Ομως μετά από λίγη σκέψη τους επεσήμανα ότι δεν γνωρίζω ότι ΑΔ//ΒΓ για να ξέρω ότι η κάθετη στην ΒΓ είναι και κάθετη στην ΑΔ (Πόρισμα στην Πρόταση ΙΙΙ του 4.2) ώστε να έχουμε ορθή γωνία.

Αλλα ακόμα και να το γνωρίζαμε για να το αξιοποιήσουμε απαιτείται γνώση μεταγενέστερης θεωρίας και συγκεκριμένα του 4^{ου} κεφαλαίου οπότε προς το παρόν πρέπει να σκεφτούμε μια λύση με όσα έχουμε μάθει μόνο.