3.3-3.4 1ο φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ (version 12-10-2016)

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΠ) (Μοναδικότητα κατασκευής)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ) (Μοναδικότητα κατασκευής)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εφαρμογή 2η *(§3.10-§3.12)*

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

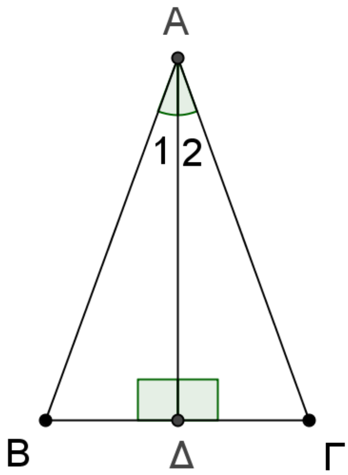
(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.

Απόδειξη:

● Έστω ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ A\Delta \text{ κοινή} \\ \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = (90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΓΠΓ είναι ίσα.Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα

στοιχεία τους ίσα ΑΒ=ΑΓ οπότε το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ και φυσικά η ΑΔ είναι και διάμεσος.

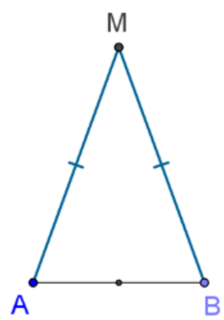
● Η απόδειξη της περίπτωση διάμεσος και ύψος αποδεικνύεται ανάλογα με χρήση του κριτηρίου ΠΓΠ.

● Η περίπτωση διάμεσος και διχοτόμος απαιτεί γνώση του «Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές *(§3.11 Πόρισμα ii)*

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη



Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ.Αφου ΜΑ=ΜΒ, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές οπότε αν θεωρήσουμε το μέσο Κ του ΑΒ, η ΜΚ είναι η διάμεσός που αντιστοιχεί στην βάση, οπότε όπως γνωρίζουμε, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Αρα δείξαμε ότι το Μ βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του ΑΒ.

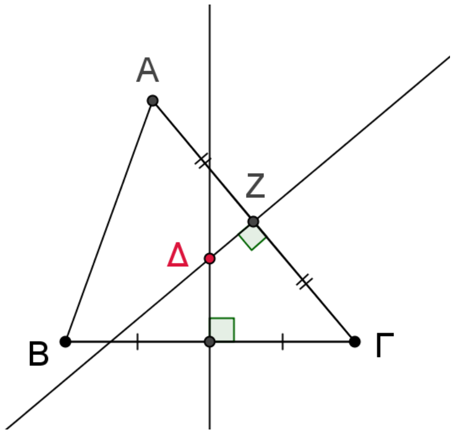
Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι:

η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

<u>Δραστηριότητα</u>

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου

Απάντηση:



Αφού το ζητούμενο σημείο ισαπέχει από τα Α, Β, Γ

- θα ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε θα βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ΑΒ, και
- θα ισαπέχει Α και Γ οπότε θα βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ΑΓ,
- Αρα θα είναι το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων.

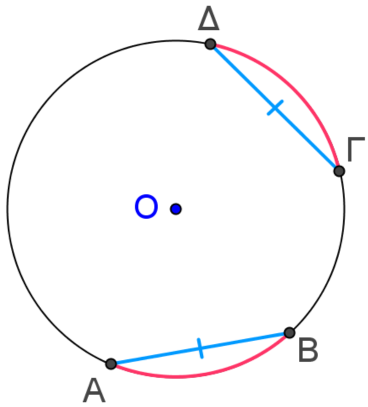
Σημείωση: Το σημείο αυτό (το Δ) ονομάζεται ***περίκεντρο***.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν:



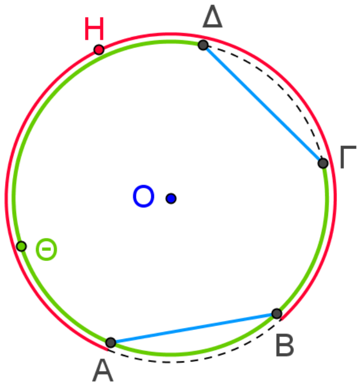
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{OA} &= \mathrm{O\Gamma}(=\rho) \\ \mathrm{OB} &= \mathrm{O\Delta}(=\rho) \\ \mathrm{AB} &= \mathrm{\Gamma\Delta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.}$$

Επομένως, $\mathrm{A\hat{O}B} = \mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}$, οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη:



Αφού ΑΒ=ΓΔ θα είναι σύμφωνα με το ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta} \Rightarrow 360° - \mathrm{AB} = 360° - \mathrm{\Gamma\Delta} \Rightarrow \mathrm{AHB} = \mathrm{\Gamma H\Delta}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.