3.5-3-6 3ο φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ (version 21-10-2016)

Θεώρημα IV

i) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

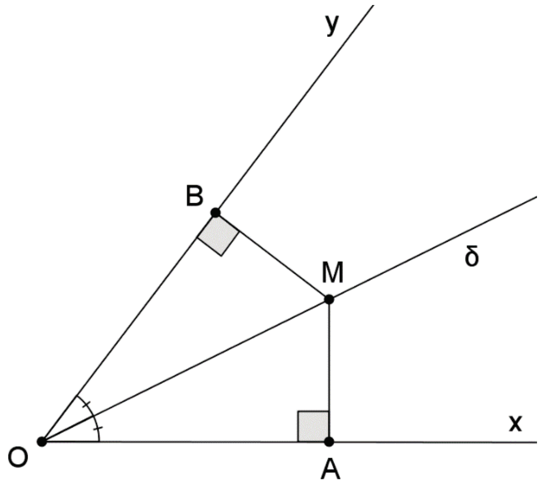
ii) Η προβολές του πάνω στις πλευρές της γωνίας ισαπέχουν από την κορυφή της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ.

Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα

ΑΟΜ και ΒΟΜ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ OM \text{ κοινή} \\ M\hat{O}A = M\hat{O}B \end{array}\right\} \Rightarrow$$ *(§ 3.6 Θεώρημα Ι)* είναι ίσα,

επομένως ΜΑ = ΜΒ.

ii) Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει και ότι ΟΒ=ΟΑ.

Αντίστροφα

Κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που:

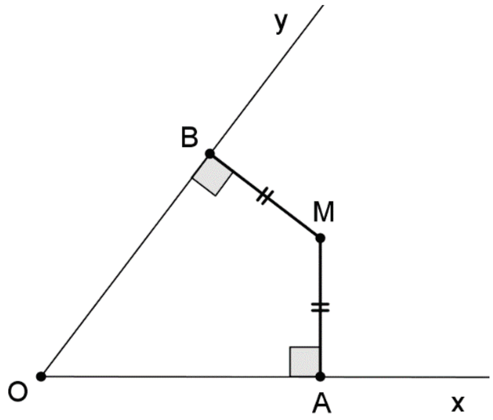
i) ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου.

ii) οι προβολές του πάνω στις πλευρές της γωνίας ισαπέχουν από την κορυφή της γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy.

Εστω ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ OM \text{ κοινή} \\ MA = MB \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (§ 3.6 Θεώρημα ΙΙ) είναι ίσα , και επομένως

$M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.

ii) Εστω ότι ΟΑ = ΟΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ OM \text{ κοινή} \\ MA = MB \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (§ 3.6 Θεώρημα ΙΙ) είναι ίσα, και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.

Σημείωση: Χώρισα το Θεώρημα IV σε ευθύ και αντίστροφο.Επίσης πρόσθεσα και τα ερωτήματα ii που δεν υπάρχουν στο βιβλίο κινούμενος στο ότι το ii του ευθέως χρειάζεται στην άσκηση Σ1 ii) και γιατί να το αποδεικνύουμε σε κάθε άσκηση που τυχόν χρειάζεται και να μην το ενσωματώσουμε στην θεωρία να το χρησιμοποιούμε όποτε θέλουμε.Ομως συνειδητοποίησα ότι και το ii του αντιστρόφου που αρχικά έβαλα για λόγους συμμετρίας είναι πολύ χρήσιμο γιατί δείχνει τρόπο κατασκευής διχοτόμου γωνίας με ένα μόνο τριγωνάκι.Παίρνω στις πλευρές δύο ίσες αποστάσεις από την κορυφή έστω ΟΑ=ΟΒ και στα Α και Β φέρνω κάθετες.Το σημείο τομής τους είναι σημείο της διχοτόμου.

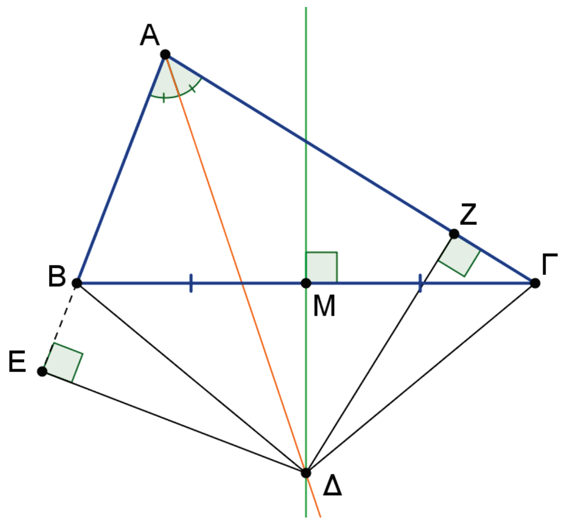
Σ1. α) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

i) Να δείξετε ότι ΕΒ=ΓΖ

ii) Να δείξετε ότι ΑΕ=ΑΖ

iii) Να δείξετε ότι ΕΒ=ΓΖ=$\frac{A\Gamma - AB}{2}$

Λύση:



i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΔΒ και ΖΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{Z}=90^\circ \\ \Delta E=\Delta Z \text{ το } \Delta \text{ ως σημείο της διχοτόμου} \\ \text{της } \hat{A} \text{ ισαπέχει από τις πλευρές της} \\ \Delta B=\Delta\Gamma \text{ το } \Delta \text{ ως σημείο της μεσοκαθέτου} \\ \text{του Β}\Gamma \text{ ισαπέχει από τα άκρα του}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Θεώρημα ΙΙ είναι ίσα.}$$

Αρα ΕΒ=ΓΖ.

ii) Τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΔΑ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{Z}=90^\circ \\ A\Delta \text{ κοινή} \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \ \ A\Delta \text{ διχοτόμος}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Θεώρημα Ι είναι ίσα άρα ΑΕ=ΑΖ}$$

iii) $\Gamma Z = A\Gamma - AZ$

$EB = AE - AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη και δεδομένου ότι ΓΖ=ΕΒ και ΑΕ=ΑΖ έχουμε:

$$\Gamma Z + EB = A\Gamma \cancel{- AZ} \cancel{+ AE} - AB \Leftrightarrow 2EB = A\Gamma - AB \Leftrightarrow EB = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$ οπότε τελικά (αφού ΓΖ=ΕΒ)

$$EB = \Gamma Z = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

Β τρόπος:

$\mathrm{AE} = \mathrm{AZ} \Leftrightarrow$

$\mathrm{AB} + x = \mathrm{A\Gamma} - x \Leftrightarrow$

$2x = \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB} \Leftrightarrow$

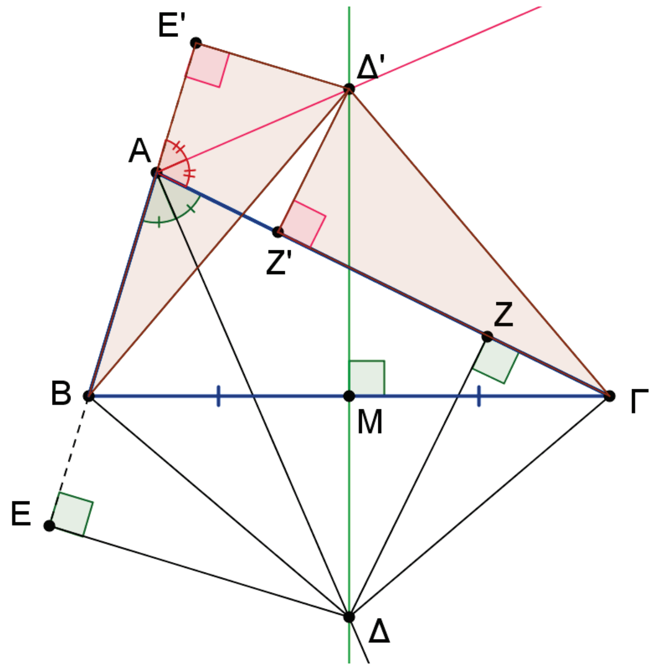
$x = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$

β) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\mathrm{A}}$, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ΄, με προβολές τα σημεία Ε', Ζ' στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

i) Να δείξετε ότι Ε'Β=ΓΖ'

ii) Να δείξετε ότι ΑΕ'=ΑΖ'

iii) Να δείξετε ότι Ε'Α=ΑΖ'=$\dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$



Λύση

i) Τα ορθογώνια τρίγωνα Ε'Δ'Β και Ζ'Δ'Γ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\mathrm{E}}' = \hat{\mathrm{Z}}' = 90^\circ \\ \Delta'\mathrm{E}' = \Delta'\mathrm{Z}' \text{ το } \Delta' \text{ ως σημείο της διχοτόμου} \\ \text{της } \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi} \text{ ισαπέχει από τις πλευρές της} \\ \Delta'\mathrm{B} = \Delta'\Gamma \text{ το } \Delta' \text{ ως σημείο της μεσοκαθέτου} \\ \text{του } \mathrm{B\Gamma} \text{ ισαπέχει από τα άκρα του} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{§ 3.6 Θεώρημα ΙΙ είναι ίσα.}$$

Αρα Ε'Β=ΓΖ'

ii) Τα τρίγωνα $\mathrm{E}'\Delta'\mathrm{A}$ και $\mathrm{Z}'\Delta'\mathrm{A}$ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\mathrm{E}}' = \hat{\mathrm{Z}}' = 90^\circ \\ \Delta'\mathrm{E}' = \Delta'\mathrm{Z}' \text{ το } \Delta' \text{ ως σημείο της διχοτόμου της } \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi} \text{ ισαπέχει από τις πλευρές τους} \\ \hat{\mathrm{A}}_1^{\varepsilon\xi} = \hat{\mathrm{A}}_2^{\varepsilon\xi} \text{ η } \mathrm{A}\Delta' \text{ διχοτόμος της } \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{§ 3.6 Θεώρημα ΙΙ}$$

είναι ίσα. οπότε $\mathrm{E}'\mathrm{A} = \mathrm{Z}'\mathrm{A}$

$AE + \Gamma Z' = AZ + BE' \Leftrightarrow$

$\cancel{AB} + BE + \cancel{A\Gamma} - AZ' = \cancel{A\Gamma} - \Gamma Z + \cancel{AB} + AE' \Leftrightarrow$

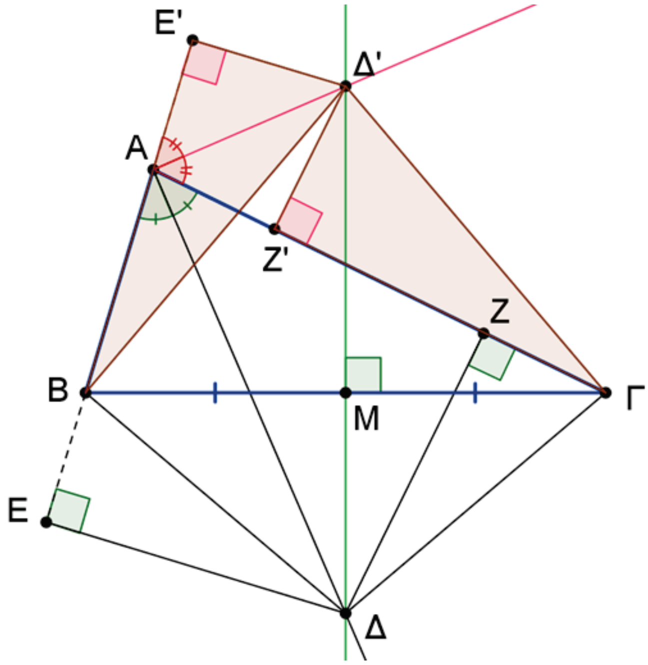
$BE - AZ' = -\Gamma Z + AE' \Leftrightarrow$

$BE + \Gamma Z = AE' + AZ' \Leftrightarrow$

$2BE = 2AZ'$

iii) Τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΑΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ \\ \Delta E \text{ κοινή} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Θεώρημα Ι είναι ίσα, οπότε ΕΑ=ΑΖ}$$



Αν θέσω $E'A = Z'A = x$ τότε:

$E'B = Z'\Gamma \Leftrightarrow$

$AB + x = A\Gamma - x \Leftrightarrow$

$2x = A\Gamma - AB \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

δηλαδή $E'A = Z'A = x = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

$BE = AE' = AZ' = AE' = x = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

τελικά $E'E = AB + 2\dfrac{A\Gamma - AB}{2} = AB + A\Gamma - AB = A\Gamma$

$E'E = AB + 2\dfrac{A\Gamma - AB}{2} = AB + A\Gamma - AB = A\Gamma$

$Z'Z = A\Gamma - 2\dfrac{A\Gamma - AB}{2} = A\Gamma - A\Gamma + AB = AB$