3.5 Υπαρξη και μοναδικότητα καθέτου-3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

ΛΥΣΕΙΣ

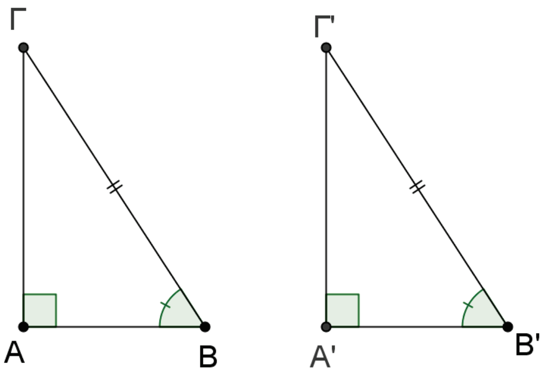
(version 21-10-2016)

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

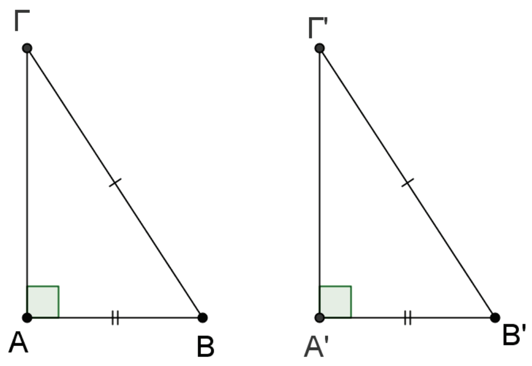
Θεώρημα Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα

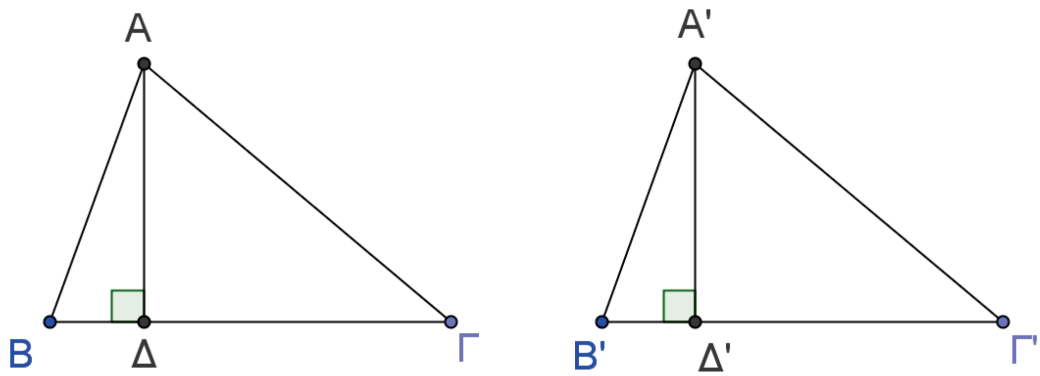


Θεώρημα ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Ε4. *Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.*



Λύση:

- Αφού τα ΑΒΓ και Α’Β’’Γ’ είναι ίσα θα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία *(σχολικό §3.1)*:

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ A\Gamma &= A'\Gamma' \\ B\Gamma &= B'\Gamma' \end{aligned}\right\} \text{ καθώς και } \left.\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}' \end{aligned}\right\}$$

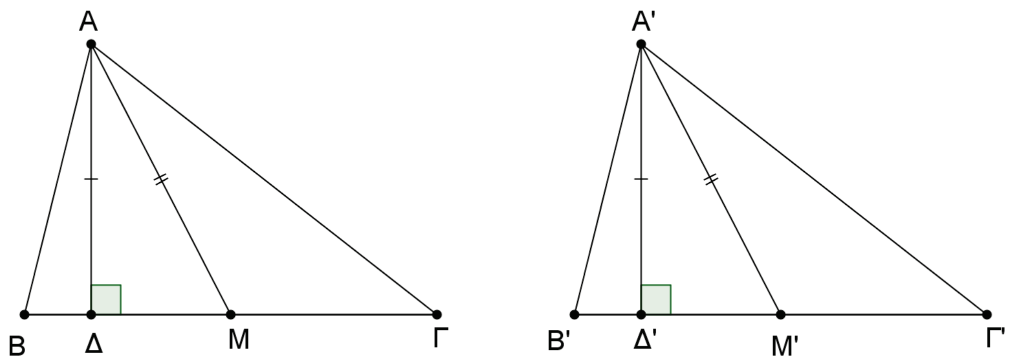
● Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και $\Delta'\mathrm{A}'\mathrm{B}'$.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_1'=90^\circ\\ \mathrm{AB}=\mathrm{A}'\mathrm{B}'\\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'\end{array}\right\}\Rightarrow$$ (*§ 3.6 Θεώρημα Ι «Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα»)* τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}'\Delta'$.

Σημείωση: Από την ίδια ισότητα παίρνουμε (χωρίς να μας το ζητάει βέβαια η άσκηση) $\mathrm{B}\Delta=\mathrm{B}'\Delta'$ *καθώς και* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\mathrm{B}'\hat{\mathrm{A}}'\Delta'$

Α2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'$ είναι $\alpha=\alpha'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$, και $\mu_\alpha=\mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.Δηλαδή αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά του ενός ίση με μια πλευρά του άλλου και τα ύψη και τις διαμέσους που αντιστοιχούν σε αυτές τις ίσες πλευρές αντιστοίχως ίσες τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση:



***Σκέψη**: Και τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων απαιτούν ισότητα τριών κύριων στοιχείων των προς σύγκριση τριγώνων. Από τα δεδομένα έχω μόνο ότι* $\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{B}'\Gamma'$ *οπότε θα προσπαθήσω να βρώ και ισότητες επιπλέον πλευρών και γωνιών από σύγκριση άλλων τριγώνων.Ας θυμηθούμε εδώ το σχόλιο στο τέλος της §3.2 του σχολικού ότι «η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδςο για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών»*

Δεδομένου ότι $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}'\Delta'$ *και* $\mathrm{AM}=\mathrm{A}'\mathrm{M}'$ *οδηγούμαστε σχεδόν αυτονόητα στην σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων ΔΑΜ και* $\Delta'\mathrm{A}'\mathrm{M}'$ *.*

● *Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΜ και* $\Delta'\mathrm{A}'\mathrm{M}'$ *.Αυτά έχουν:*

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_1'=90^\circ\\ \mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}'\Delta'\\ \mathrm{AM}=\mathrm{A}'\mathrm{M}'\end{array}\right\}\Rightarrow$$ § 3.6 Θεώρημα ΙΙ *«Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα»* τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

i) $\Delta M = \Delta' M'$

ii) $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$

iii) $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$

<u>Σκέψη</u>: Δυστυχώς καμμιά από τις ισότητες που μου έδωσε η σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων δεν με βοηθάει άμεσα στην σύγκριση των ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$.Ομως μπορώ να τις χρησιμοποιήσω σε μια ακόμα σύγκριση τριγώνων που ελπίζουμε θα είναι πιο αποδοτική.

- Τα τρίγωνα ΑΜΒ και $A'M'B'$ έχουν :

$$\left.\begin{array}{l} BA = B'A' \text{ (δεδομένα)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}'_1 \text{ από προηγούμενη σύγκριση} \\ BM = B'M' \text{ ως μισά των ίσων πλευρών } B\Gamma \text{ και } B'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Π-Γ-Π είναι ίσα.Επομένως θα έχουν και τα

υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

i) $BA = B'A'$

ii) $\hat{B} = \hat{B}'$

iii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$

- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} BA = B'A' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Π-Γ-Π είναι ίσα

<u>Σημείωση</u>: Η πιο πάνω λύση είναι η πιο σύντομη άρα και πιο ωραία.Θα μπορούσαμε βέβαια εναλλακτικά στο 2^o βήμα της λύσης να συγκρίνουμε τα:

α) τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και $\Delta'A'B'$

β) τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και $\Delta'A'\Gamma'$

γ) τα ΑΓΜ και $A'\Gamma'M'$.

Κατασκευή:Πως κατασκευάζεται ένα τρίγωνο (μοναδικό σύμφωνα με την άσκηση) με δοσμένα:

i) την πλευρά α και

ii) το ύψος υ_α

iii) την διάμεσο μ_α (διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α)

α) Κατασκευάζω την ΒΓ.

β) Παίρνω το μέσο της Μ

γ) Χαράζω τον κύκλο (Μ, μ_α)

δ) Φέρνω παράλληλη στην ΒΓ που να απέχει υ_α από αυτή.

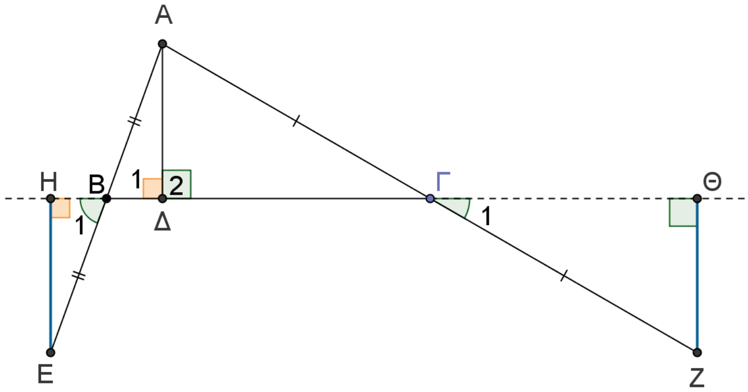
ε) Το σημείο τομής του κύκλου και της παραλλήλου ορίζει την κορυφή Α.

Εφαρμογή 1 (με παράλειψη βοηθητικού ερωτήματος)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ, παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ.

Αν ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε να αποδειχθεί ότι **ΕΗ = ΖΘ**.

Λύση:



<u>Σκέψη</u>: Φυσικά μας έρχεται στο νού να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΗΕΒ και ΘΓΖ αλλά φαίνονται τόσο διαφορετικά στο σχήμα που μας φεύγει σχεδόν αμέσως δεδομένου ότι το σχήμα είναι άρτια με υπολογιστή φτιαγμένο . Επίσης είναι απομακρυσμένα.Τίποτε κακό σε αυτό απλά γειτονικά τρίγωνα μπορεί να έχουν κατακορυφήν ίσες ή κοινή πλευρά ή κοινή γωνία.Πρέπει να έχουμε πάντα την ετοιμότητα αν δύο τμήματα δεν μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα ότι είναι ίσα μήπως μπορούμε να δείξουμε ότι το καθένα με ένα τρίτο.Αφού το ΗΒΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο θα το συγκρίνω με ορθογώνιο τρίγωνο.Αρα:

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

- Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΔ και και ΗΕΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{H} = 90^\circ \\ AB = BE \text{ από υπόθεση} \\ \hat{B} = \hat{B}_1 \text{ ως κατακορυφήν} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ *§ 3.6 Θεώρημα Ι* είναι ίσα άρα θα έχουν και ΑΔ=ΕΗ **(1)**

- Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και και ΘΖΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_2 = H = 90^\circ \\ A\Gamma = \Gamma Z \text{ από υπόθεση} \\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \text{ ως κατακορυφήν} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ *§ 3.6 Θεώρημα Ι* είναι ίσα άρα θα έχουν και ΑΔ=ΖΘ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι ΕΗ=ΖΘ.

<u>Σημείωση</u>: Αφού όταν λέμε γωνία $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ εννοούμε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ δεν έβαλα δείκτες όπως το σχολικό.

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr