

ΘΕΜΑ 4 3691

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι 30° . **(Μονάδες 8)**

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda=6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Γνωρίζουμε ότι (σ. 61) η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Άρα οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές.

$\left. \begin{array}{l} K\Delta // \varepsilon \\ \varepsilon \perp \Lambda\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow K\Delta \perp \Lambda\Gamma$ (Πόρισμα σ. 78) δηλαδή $\hat{\Delta}$ ορθή.

Το $B\Gamma\Delta K$ έχει 3 γωνίες ορθές άρα είναι ορθογώνιο.

(Κριτήριο (iii) σ. 101)

β) Ως ορθογώνιο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, συνεπώς:

$$\Gamma\Delta = BK = \rho$$

$$K\Lambda = KA + \Lambda\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$$

$$\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$$

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι $\Lambda\Delta = \frac{K\Lambda}{2}$, οπότε από (Πόρισμα σ. 110) $\hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$.

γ) Αφού $K\Delta // \varepsilon$ θα είναι $\hat{E} = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, συνεπώς από (Πόρισμα σ. 110)

$$EK = 2BK = 2\rho$$

$$\text{Τελικά } E\Lambda = EK + K\Lambda = 2\rho + 4\rho = 6\rho.$$

