

**ΘΕΜΑ 4 3724**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και δυο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του  $E$  και τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

**α)** Αν το σημείο  $E$  δεν είναι το μέσο του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο. **(Μονάδες 8)**

ii.  $\Gamma\Delta = \Delta\Delta + B\Gamma$ . **(Μονάδες 8)**

**β)** Αν το σημείο  $E$  βρίσκεται στο μέσον του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε τήν περίμετρο του ορθογωνίου  $A\Delta\Gamma B$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του κύκλου.

**(Μονάδες 9)**

**ΛΥΣΗ:**

**α) i.** Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη επομένως  $OA \perp \varepsilon_1$  και  $OB \perp \varepsilon_2$ .

Ομως τα σημεία  $A, O, B$  είναι σημεία της διαμέτρου  $AB$ , δηλαδή οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι κάθετες στην διάμετρο  $AB$ , οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλες *(Πόρισμα II σ.76)*.

Άρα το  $AB\Delta\Gamma$  τραπέζιο.

ii. Τα εφαπτόμενα τμήματα σε κύκλο είναι ίσα επομένως

$$\Gamma A = \Gamma E \text{ και } \Delta E = \Delta B$$

$$\text{Επομένως } \Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = \Gamma A + \Delta B$$

**β)** Αν  $E$  μέσο του τόξου  $AB$  τότε  $\widehat{AE} = \widehat{EB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ,

οπότε και  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$  *(Θεώρημα I σ. 23)*.

Επίσης  $\varepsilon \perp OE$  *(η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη σ.61)*

Πλέον  $AB$  και  $\varepsilon$  είναι κάθετες στην ίδια ευθεία  $OE$  επομένως θα είναι παράλληλες *(Πόρισμα II σ.76)*

Το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα

είναι παραλληλόγραμμο, κι επειδή έχει μια γωνία ορθή (π.χ. την  $\hat{A}$ ) είναι ορθογώνιο *(Ορισμός σ.100)*

$$\text{Περίμετρος ορθογωνίου} = AB + B\Gamma + \Delta\Gamma + \Delta A = 2r + r + 2r + r = 6r.$$

