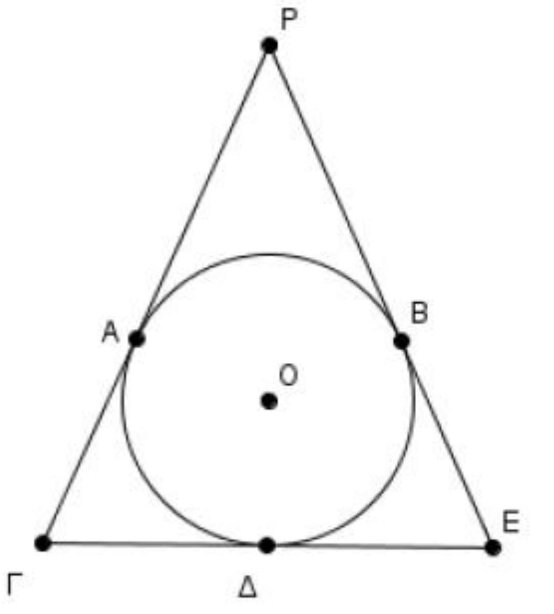
ΘΕΜΑ 4 **3728**

Εστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.



α) Να αποδείξετε ότι:

I. $P\Gamma=\Gamma\Delta+AP$ (Μονάδες 6)

II. $P\Gamma-\Gamma\Delta=PE-\Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) I. Από το σχήμα βλέπουμε ότι: ΡΓ=ΡΑ+ ΑΓ (1)

Γνωρίζουμε. *(Θεώρημα ΙΙ σ.62)* ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται (φέρονται) από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα, επομένως:

ΓΑ=ΓΔ (1)

οπότε η (1) γίνεται ΡΓ=ΡΑ+ ΓΔ=ΓΔ+ΑΡ.

II. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται (φέρονται) από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα, έχουμε:

ΡΑ=ΡΒ (2) και ΕΒ=ΕΔ (3)

$P\Gamma-\Gamma\Delta= P\Gamma-$ΑΓ=ΑΡ=ΡΒ=ΡΕ-ΡΒ=ΡΕ-ΔΕ

β) I. Αν ΑΓ=ΒΕ, τότε επειδή γνωρίζουμε ότι ΡΑ=ΡΒ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

ΑΓ+ΡΑ=ΒΕ+ΡΒ ⇔ ΡΓ=ΡΕ

δηλαδή το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

II. Στο I δείξαμε ότι ΡΓ=ΡΕ , άρα και το Ρ σημείο της μεσοκαθέτου του ΓΕ.

Αφού ΑΓ=ΒΕ θα είναι και ΓΔ=ΔΕ δηλαδή Δ μέσο του ΓΕ.

Το ΟΔ ⊥ ΓΕ (ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής *σ.61*)

Αρα ΟΔ τμήμα της μεσοκαθέτου του ΓΕ.

Δείξαμε λοιπόν ότι τα Ρ,Ο, Δ ανήκουν στην μεσοκάθετο του ΓΕ, συνεπώς είναι συνευθειακά.