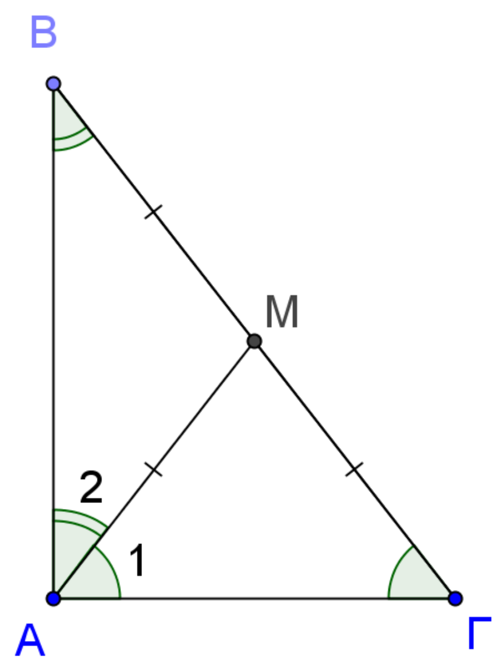
Τα παρακάτω θέματα δόθηκαν στις εξετάσεις Ιουνίου του σχολικού έτους 2013-14 στο $17^{ο}$ ΓΕ.Λ Αθηνών με εισηγητές τους καθηγητές Νίκο Καρακάση και Δημήτρη Αθανασίου.

**ΘΕΜΑ $1^{ο}$**

Α. Να αποδείξετε ότι :

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη: *(σχολικό σ.109)*




Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ.

Αν $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι ορθή.

Επειδή $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Gamma}$ **(1)** και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{B}}$ **(2)**.

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}}$, δηλαδή $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}}$.

Αλλά $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}} = 2\llcorner$ , οπότε $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{A}} = 2\llcorner$ ή $2\hat{\mathrm{A}} = 2\llcorner$ ή $\hat{\mathrm{A}} = 1\llcorner$.

*Υπενθύμιση: Το σύμβολο ∟ σημαίνει μία ορθή γωνία*

**Β.** Αναφέρατε τέσσερεις ιδιότητες για τις διαγωνίους ενός τετραγώνου **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Οι διαγώνιοί του τετραγώνου:

i) Διχοτομούνται *(αφού είναι παραλληλόγραμμο)*

ii) Είναι ίσες *(αφού είναι ορθογώνιο)*

iii) Τέμνονται κάθετα *(αφού είναι ρόμβος)*

iv) Διχοτομούν τις γωνίες του *(αφού είναι ρόμβος)*

**Γ.** Ποιά κοινή ιδιότητα έχουν τα σημείαΑ

**α)** ενός κύκλου

**β)** της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος

γ) της διχοτόμου μιάς γωνίας **Μονάδες 3**

Απάντηση:

α) Τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου. *(σ.21)*

β) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος *(Πόρισμα III σ.37)*

γ) Τα σημεία της διχοτόμου ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας. *(Θεώρημα IV σ.46)*

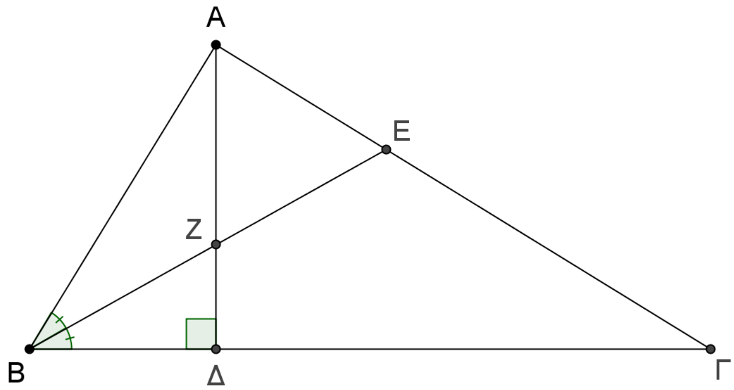
**Δ.** Αναφέρατε πέντε τρόπους (ορισμός-κριτήρια) με τους οποίους μπορείτε να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 5**

Απάντηση:

1. Ενα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο. (Ορισμός)
2. Ενα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές ανά δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.
3. Ενα τετράπλευρο που έχει δυο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.
4. Ενα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες του ανά δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.
5. Ενα τετράπλευρο που οι διαγωνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.

**ΘΕΜΑ 2ο (5578 της τράπεζας θεμάτων)**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.




**α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι 60ο.

**β)** Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ:

**α)** $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{\Gamma}+\hat{B}=180°$

Η τελευταία σχέση με βάση το δεδομένο $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ γίνεται:

$$2\hat{B}+\hat{B}=180° \Leftrightarrow 3\hat{B}=180° \Leftrightarrow \hat{B}=\frac{180°}{3}=60°$$

**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ έχει δύο γωνίες ίσες με 60ο, αφού τότε και η τρίτη γωνία θα είναι 60ο οπότε το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο *(Πόρισμα (iii) σ.54)*

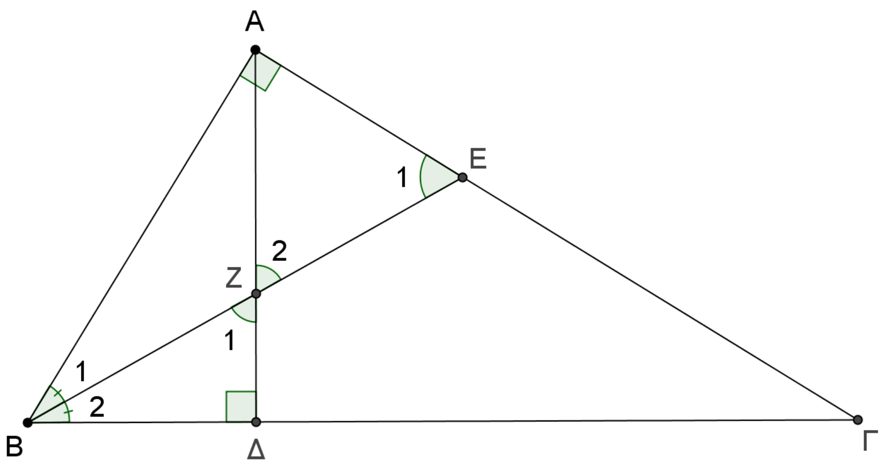
Αφού όπως δείξαμε στο **α)** είναι $\hat{B}$ =60ο, θα είναι:

$\hat{A}+\hat{\Gamma}=180°-60°=120°$ και αντικαθιστώντας σύμφωνα με το δεδομένο $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120° \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=120° \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=\frac{120°}{4}=30° \text{ και } \hat{A}=3\hat{\Gamma}=3\cdot 30°=90°$$

► Αφού ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ θα είναι: $\hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{60°}{2}=30°$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ θα είναι: $\hat{E}_1=90°-30°=60°$



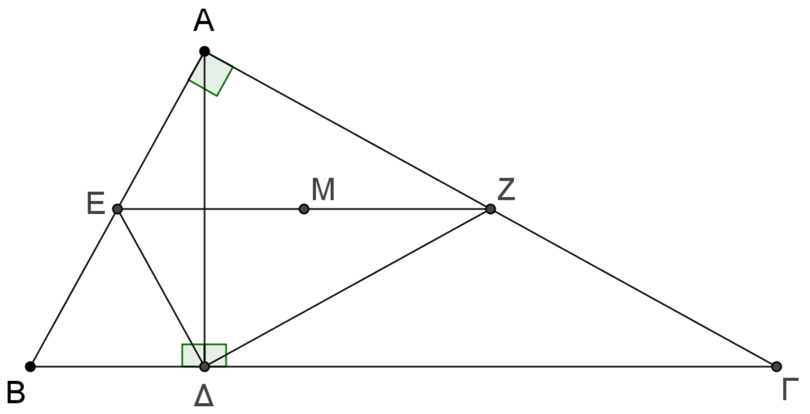

► Αφού ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ θα είναι:

$$\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{60°}{2}=30°$$

Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΒ έχουμε : $\hat{Z}_1=90°-30°=60°$ .Τέλος ισχύει $\hat{Z}_2 \overset{\text{κατακορυφήν γωνίες}}{=} \hat{Z}_1=60°$

*[Σημείωση:]()* *Μια άλλη άσκηση θα ήταν να μας δίνεται ότι το ΑΕΖ είναι ισόπλευρο και να πρέπει να δείξουμε ότι* $\hat{A}=90°$

**ΘΕΜΑ 3ο**




Δίνονται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ.

Θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Δίνεται επίσης το μέσο Μ του ΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\Delta E=\frac{AB}{2}$ και $\Delta Z=\frac{A\Gamma}{2}$ **Μονάδες 4+4**

**β)** $E\Delta Z=90°$ **Μονάδες 8**

**γ)** $\Delta M=\frac{B\Gamma}{4}$ **Μονάδες 9**

ΛΥΣΗ:

**α)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ, η ΔΕ είναι διάμεσος του που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας *(Θεώρημα Ι σ.109)*

$$\Delta E=\frac{AB}{2}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ το ΔΖ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας *(Θεώρημα Ι σ.109)*

$$\Delta Z=\frac{A\Gamma}{2}$$

**β)** *1ος τρόπος*

Δείξαμε στο **α)** ότι $\Delta E=\frac{AB}{2}$

Από τα δεδομένα το Ε μέσο της ΑΒ άρα $AE=\frac{AB}{2}$

Επομένως ΔΕ=ΑΕ

Δείξαμε στο **α)** ότι $\Delta Z=\frac{A\Gamma}{2}$ .Από τα δεδομένα το Ζ μέσο της ΑΓ άρα $AZ=\frac{AZ}{2}$

Επομένως ΔΖ=ΑΖ

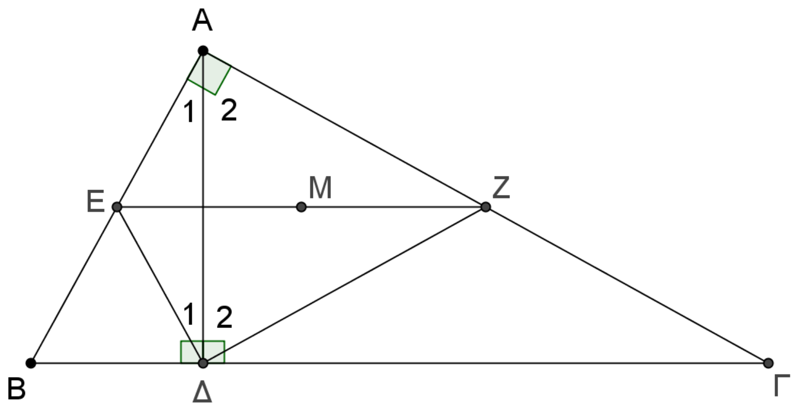
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ.Αυτά έχουν :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E = AE \\ \Delta Z = AZ \\ EZ \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Κριτήριο Π - Π - Π} \quad \text{είναι ίσα.}$$

Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα και ειδικά:

$$E\Delta Z = EAZ = 90°$$

*2ος τρόπος*




Αφού ΔΕ=ΕΑ το τρίγωνο ΕΔΑ είναι ισοσκελές οπότε:

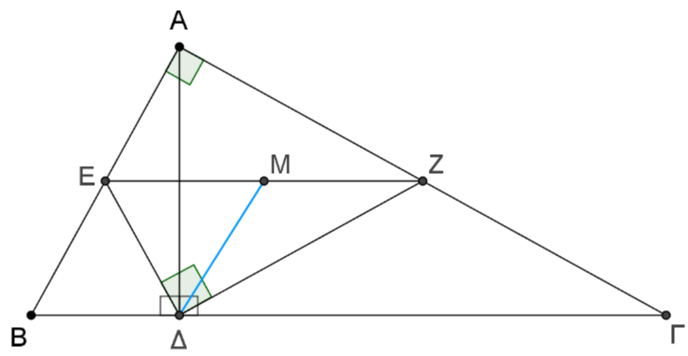
$$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$$

Αφού ΔΖ=ΖΑ το τρίγωνο ΖΔΑ είναι ισοσκελές οπότε:

$$\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2$$

Αρα $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90°$

**γ)** Το ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΖ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας *(Θεώρημα Ι σ.109)*




$$\Delta M = \frac{EZ}{2} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ μέσο } AB \\ Z \text{ μέσο } A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow EZ = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2)$$ *(Θεώρημα Ι σ.104)*

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta M = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{2}{1}} = \dfrac{B\Gamma}{4}$

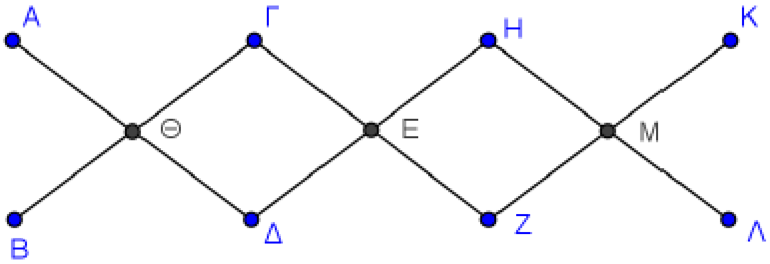
**ΘΕΜΑ 4ο (**2799 της τράπεζας θεμάτων)

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

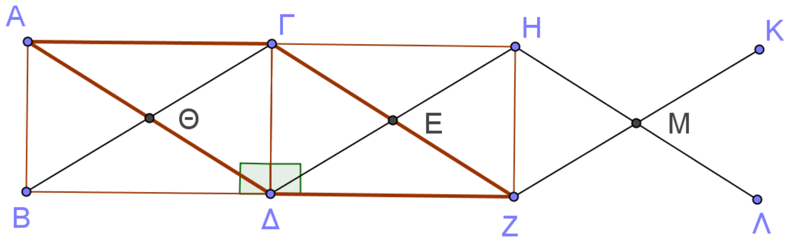
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)




ΛΥΣΗ:

**α)** Το τετράπλευρό ΓΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και ειδικότερα είναι και ορθογώνιο αφού οι διαγώνιές του είναι ίσες.

Επομένως η γωνία ΓΔΖ είναι ορθή.




**β)** Παρόμοια το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται και είναι και ορθογώνιο αφού οι διαγώνιές του είναι ίσες.

Επομένως και η γωνία $\Gamma\hat{\Delta}B$ είναι ορθή.

Τελικά $B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}Z = 90° + 90° = 180°$

Επομένως τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

**γ)** 1ος τρόπος

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΑΔ και ΓΔΖ είναι ίσα γιατί έχουν:

- ΓΔ κοινή
- ΑΔ=ΓΖ

Επομένως και ΑΓ=ΔΖ

Επιπλέον από τα δεδομένα ΑΔ=ΓΖ.

Το ΑΓΖΔ έχει λοιπόν τις απέναντι πλευρές του ανά δύο ίσες. άρα από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

**2ος τρόπος**

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΑΔ και ΓΔΖ είναι ίσα γιατί έχουν:

- ΓΔ κοινή
- ΑΔ=ΓΖ

Επομένως και ΑΓ=ΔΖ.

Αφού ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΓ//ΒΔ κι επειδή Β, Δ, Ζ συνευθειακά θα είναι και ΑΓ//ΔΖ.

Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ έχει λοιπόν δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

**3ος τρόπος**

Αφού ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμο ΑΓ//ΒΔ κι επειδή Β, Δ, Ζ συνευθειακά θα είναι και ΑΓ//ΔΖ (1)

Το τετράπλευρο ΓΘΔΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες *(μισά ίσων τμημάτων)* επομένως *(κριτήριο (i) σ.102)* είναι ρόμβος.Κατά συνέπεια ΓΕ//ΘΔ οπότε και ΓΖ//ΑΔ **(2).**

Από (1) και (2) το τετράπλευρο ΑΓΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε από τον ορισμό του παραλληλογράμμου προκύπτει ότι ΑΓΖΔ παραλληλόγραμμο.