17ο Γενικό Λύκειο Αθηνών **Σχολικό Έτος 2014-15**

Τάξη: Α' Λυκείου **Αθήνα 12-6-2015**

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

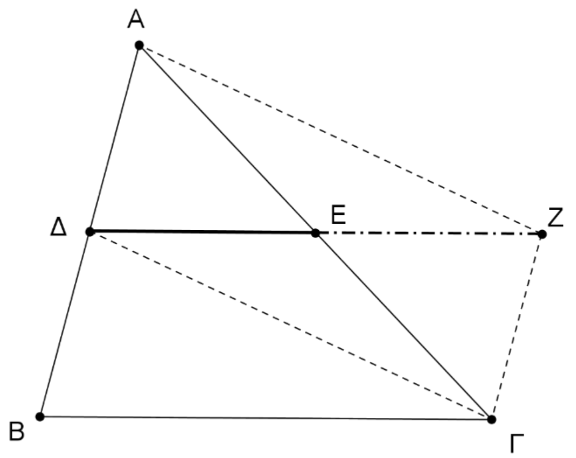
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. **Μονάδες 15**

Απόδειξη:



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.Θα αποδείξουμε ότι:

$\Delta E \,//=\, \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, και αφού ΑΔ = ΔΒ, θα είναι και ΔΒ = // ΓΖ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, συνεπώς από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και

(ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Β. Να γράψετε στην κόλλα σας τα γράμματα της **Στήλης 1** και δίπλα σε κάθε γράμμα **τους αριθμούς** της **στήλης 2** που αντιστοιχούν σε τετράπλευρα που έχουν την ιδιότητα της **Στήλης 1.**

Στήλη 1	**Στήλη 2**
α. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα	**1.** παραλληλόγραμμο
β. Οι γωνίες του είναι ορθές	**2.** ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
γ. Οι πλευρές του είναι ίσες	**3.** ρόμβος
δ. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται	**4.** τετράγωνο
ε. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.	

Μονάδες 5x2=10

Απάντηση:

Οι λύσεις βρίσκονται εύκολα αν έχουμε στο μυαλό μας τα σχήματα:

α→3, 4

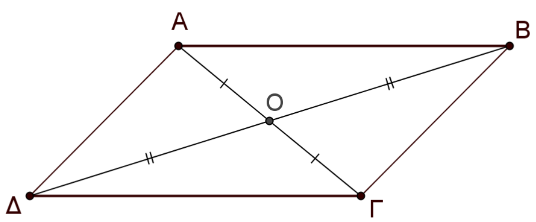
β→2, 4

γ→3, 4

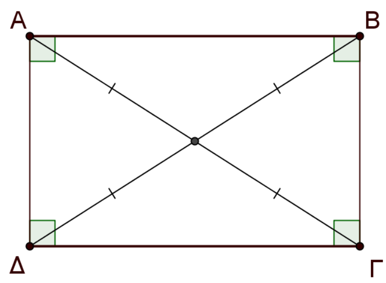
δ→1, 2, 3, 4

ε→2, 4

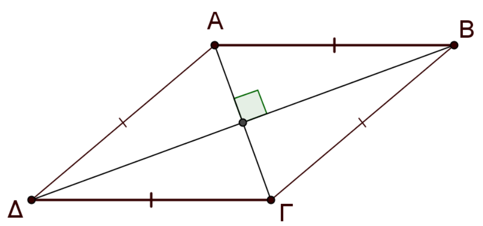
Παραλληλόγραμμα



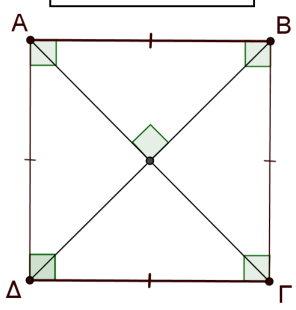
Ορθογώνιο



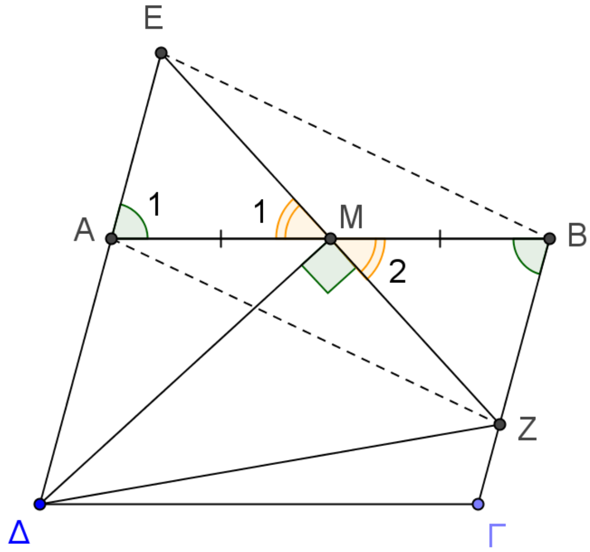
Ρόμβος



Τετράγωνο



Θέμα 2ο



Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσον της ΑΒ.

Αν η κάθετη στο ΔΜ στο μέσο Μ τέμνει τις ΔΑ και ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα τότε να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΑΕ και ΜΒΖ είναι ίσα. **Μονάδες 8**

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΑ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα ΔΕΖ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 9**

Λύση:

α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΜΑΕ και ΜΒΖ. Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \text{ από τα δεδομένα} \\ \hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2 \text{ ως κατακορυφήν} \\ \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}} \text{ ως εντός εναλλάξ} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma\Pi\Gamma \text{ είναι ίσα.}$$

Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AE} = \mathrm{BZ} \\ \mathrm{ME} = \mathrm{MZ} \\ \hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{Z}}_1 \end{array}\right\}$$

β) Αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο είναι ΑΔ//ΒΓ επομένως και ΑΕ//ΒΖ.

Επιπλέον στο **α)** δείξαμε ότι ΑΕ=ΒΖ οπότε το τετράπλευρο ΕΒΖΑ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο **α)** δείξαμε ότι ΜΕ=ΜΖ.Επομένως η ΔΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΖ.Επειδή είναι και ύψος το ΔΕΖ είναι ισοσκελές. *(εφαρμογή 2η Ανισοτικές σχέσεις)*

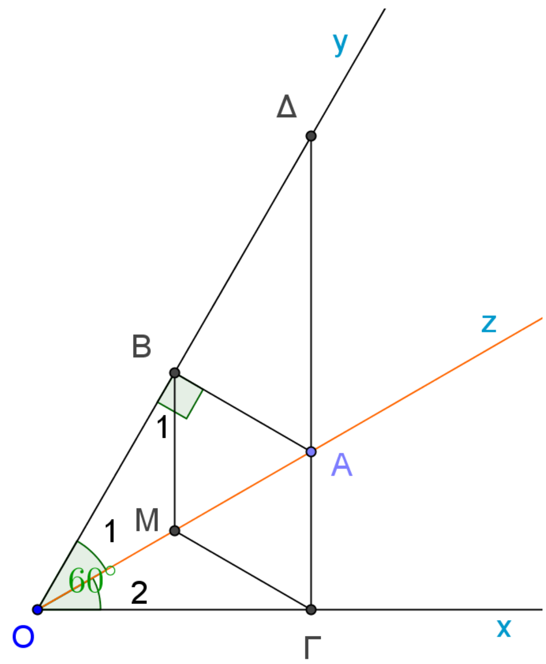
● Φυσικά μπορούμε να το αποδείξουμε άμεσα και με σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων ΜΔΕ και ΜΔΖ.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\mathrm{M} \text{ κοινή} \\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Delta = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Delta = 90^\circ \\ \mathrm{ME} = \mathrm{MZ} \text{ από α)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi \text{ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΔΕ=ΔΖ δηλαδή ΔΕΖ είναι ισοσκελές.}$$

Θέμα 3ο

Δίνονται γωνία $x\hat{O}y = 60°$ και η διχοτόμος της Oz.Από σημείο Α της Oz φέρουμε $AB \perp Oy$ (Β σημείο της Oy).

Φέρουμε την διάμεσο ΒΜ του τριγώνου ΒΟΑ και από το Α παράλληλη στη ΒΜ που τέμνει τις ημιευθείες Οx και Οy στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \frac{1}{2}OA$

β) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ορθογώνιο.

δ) Το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι ρόμβος.

Λύση:

α) Αφού $x\hat{O}\psi = 60°$ και η Οz είναι διχοτόμος είναι $\hat{O}_1 = 30°$.Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ από γνωστό πόρισμα, *(§ 5.9)* έχουμε $AB = \frac{1}{2}OA$ **(1)**

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ, η ΒΜ είναι η διάμεσος που φέρνουμε από την ορθή γωνία, οπότε από γνωστό θεώρημα *(§ 5.9 Θεώρημα I)* είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας*:*

$BM = \frac{OA}{2} = OM$ **(2)** δηλαδή το ΟΜΒ ισοσκελές με Βάση ΟΒ επομένως οι προσκείμενες στην βάση γωνίες θα είναι ίσες $\hat{B}_1 = \hat{O}_1 = 30°$.

Αφού ΑΔ//ΜΒ θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{B}_1 = 30°$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά.

Αρα αφού $\hat{\Delta} = \hat{O}_1 = 30°$ το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΓΟΔ είναι $\hat{O} = 60°$ και $\hat{\Delta} = 30°$.Αρα $\hat{\Gamma} = 180° - 60° - 30° = 90°$.Αρα το ΓΟΑ είναι ορθογώνιο.

δ) Αφού $x\hat{O}\psi = 60°$ και η Οz είναι διχοτόμος είναι $\hat{O}_2 = 30°$.Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΑ από γνωστό πόρισμα *(§ 5.9)* έχουμε $A\Gamma = \frac{1}{2}OA$ **(3)**.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΑ, η ΓΜ είναι η διάμεσος που φέρνουμε από την ορθή γωνία, οπότε από γνωστό θεώρημα *(§ 5.9 Θεώρημα Ι)* είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας*:*

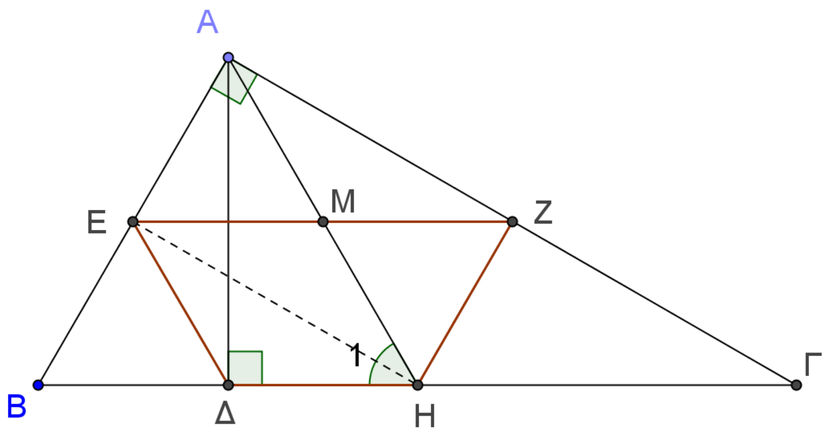
$$\Gamma\mathrm{M} = \frac{\mathrm{OA}}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

Από **(1), (2), (3), (4),** προκύπτει ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{BM} = \Gamma\mathrm{M} = \Gamma\mathrm{A}$, άρα το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι ρόμβος.

(Αφού έχει όλες τις πλευρές ίσες θα έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, οπότε από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή και δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες, είναι ρόμβος (ορισμός ρόμβου).

Θέμα 4ο

Δίνονται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ.



Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

Εστω Μ το σημείο τομής των ΕΖ και ΑΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 7**

β) το τετράπλευρο ΑΖΗΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 6**

γ) $AM = ME = \frac{B\Gamma}{4}$. **Μονάδες 6**

δ) Αν $\hat{H}_1 + \hat{\Gamma} = 90°$ τότε ισχύει $B\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$. **Μονάδες 6**

Λύση:

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$\left.\begin{matrix} E \text{ μέσο του } AB \\ Z \text{ μέσο του } A\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow EZ = // \frac{B\Gamma}{2}$$ *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)*

Αρα το ΕΖΗΔ είναι τραπέζιο.

Για να δείξουμε ότι είναι ισοσκελές τραπέζιο μένει να δείξουμε ότι ΕΔ=ΖΗ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\left.\begin{matrix} Z \text{ μέσο του } A\Gamma \\ H \text{ μέσο του } B\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow ZH = // \frac{AB}{2}$$ (1) *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)*

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ η ΔΕ είναι η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε $E\Delta = \frac{AB}{2}$ (2) *(§ 5.9 Θεώρημα Ι)*

Αρα από (1) και (2) προκύπτει ΖΗ=ΔΕ οπότε το ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Από $ZH = // \frac{AB}{2} \Leftrightarrow ZH = // EA$.Αρα το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες οπότε απο γνωστό κριτήριο για παραλληλόγραμμα (ii) συμπεραίνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον $\hat{A} = 90°$, από τον ορισμό του ορθογωνίου είναι ορθογώνιο.

γ) Επειδή το ΑΖΗΕ είναι ορθογώνιο έχει ίσες διαγώνιες και επειδή είναι και παραλληλόγραμμο, αυτές διχοτομούνται.Αρα :

$$\mathrm{AH}=\mathrm{EZ}\Rightarrow\frac{\mathrm{AH}}{2}=\frac{\mathrm{EZ}}{2}\Rightarrow\mathrm{AM}=\mathrm{ME}=\frac{\mathrm{EZ}}{2}=\frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$$

δ) $\hat{\mathrm{H}}_1+\hat{\Gamma}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90^\circ$ οπότε $\hat{\mathrm{H}}_1=\hat{\mathrm{B}}$ δηλαδή το ΑΒΗ ισοσκελές.

Στο ισοσκελές ΑΒΗ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος.

Αρα $\mathrm{B\Delta}=\frac{\mathrm{BH}}{2}\overset{\text{Η μέσο ΒΓ}}{=}\frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$

Σημείωση: Ο Ν.Κ. παρατήρησε ότι αφού $\hat{\mathrm{H}}_1$ εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΗΓ έχουμε:

$\hat{\mathrm{H}}_1=2\hat{\Gamma}$ οπότε από $\hat{\mathrm{H}}_1+\hat{\Gamma}=90^\circ\Rightarrow2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ\Rightarrow3\hat{\Gamma}=90^\circ\Rightarrow\hat{\Gamma}=\frac{90^\circ}{3}\Rightarrow\hat{\Gamma}=30^\circ$

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Καρούσος Χαράλαμπος

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Καρακάσης Νικόλαος

Μπούρας Παναγιώτης

Αθανασίου Δημήτριος