ΘΕΜΑ 2   2860 (3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

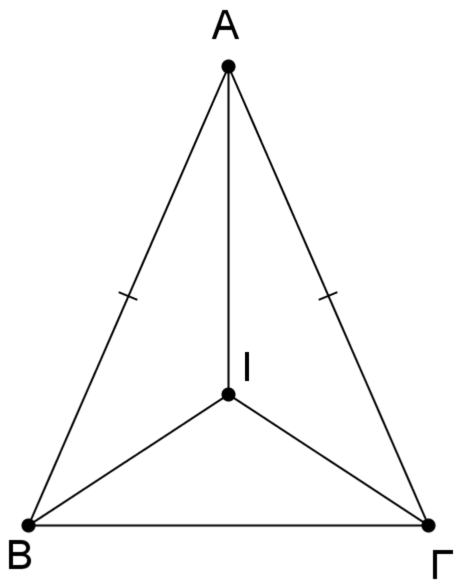
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

Λύση:



α) Αφού ΑΒΓ ισοσκελές θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$.Αρα το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.Επομένως ΒΙ=ΙΓ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΙ και ΑΓΙ.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB=B\Gamma \\ AI \text{ κοινή} \\ BI=I\Gamma \text{ από α)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Pi\Pi$$ είναι ίσα, επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

$$A\hat{I}B=A\hat{I}\Gamma$$

γ) Αφού ΑΒ=ΑΓ, το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ *(§3.4 Πόρισμα ΙΙ).*

Αφού ΙΒ=ΙΓ και το Ι είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ *(§3.4 Πόρισμα ΙΙ).*

Αρα η ΑΙ είναι η μεσοκάθετος (αφού από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία §2).

ΘΕΜΑ 2_2816 κύκλος

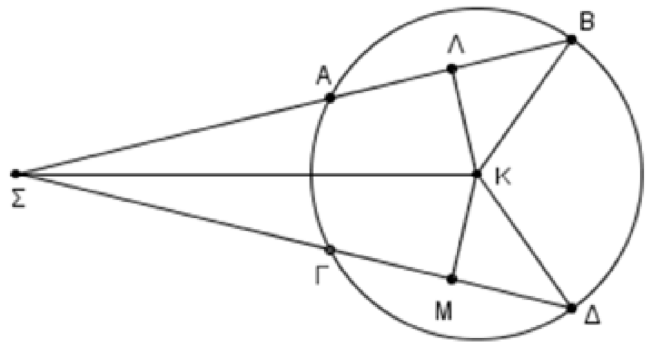
Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ΣΒ=ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. **(Μονάδες 10)**

ii. ΚΛ=ΚΜ. **(Μονάδες 10)**

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. **(Μονάδες 5)**



Λύση:

α) Τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma K \text{ κοινή} \\ \Sigma B = \Sigma\Delta \text{ από τα δεδομένα} \\ KB = K\Delta \text{ ως ακτίνες κύκλου} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα, επομένως } \hat{B} = \hat{\Delta}.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΒΚ και ΜΔΚ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\Delta} \text{ (όπως δείξαμε πιο πάνω)} \\ KB = K\Delta \text{ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων *(§ 3.6 Θ.Ι)* είναι ίσα.

Επομένως θα έχουν ΚΛ=ΚΜ.

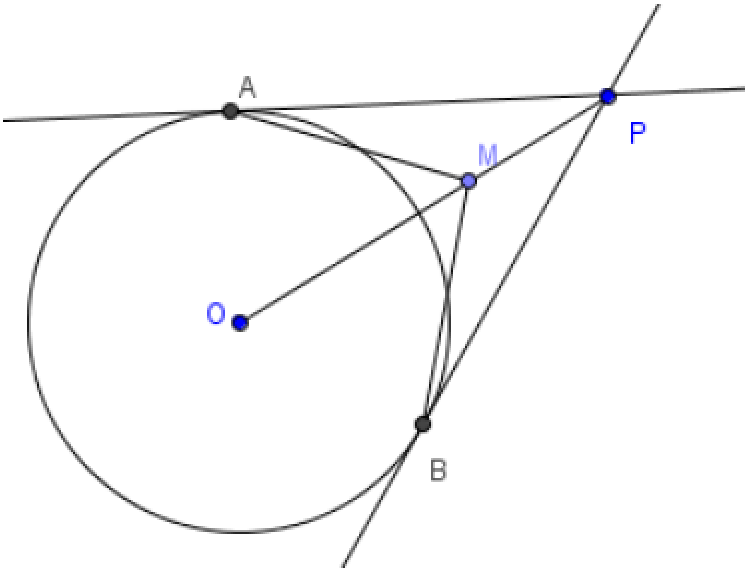
β) Από *(§ 3.6 Θ.ΙΙΙ)* αφού τα δύο αποστήματα ΚΛ και ΚΜ του κύκλου είναι ίσα και οι χορδές τους θα είναι ίσες δηλαδή ΑΒ=ΓΔ.

ΘΕΜΑ 2_5127 κύκλος

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) οι γωνίες $\widehat{\mathrm{MAO}}$ και $\widehat{\mathrm{MBO}}$ είναι ίσες. **(Μονάδες 13)**



Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους *(§3.15 Θεώρημα II)* επομένως PA=PB.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η διακεντρική ευθεία PO του σημείου P διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων τμημάτων. *(§3.15 Πόρισμα (ii)),* επομένως $\mathrm{A\hat{P}M} = \mathrm{M\hat{P}B}$ *.*

Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{PA} = \mathrm{PB} \\ \mathrm{A\hat{P}M} = \mathrm{M\hat{P}B} \\ \mathrm{PM}\ \text{κοινή}\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{ είναι ίσα.}$$

β) Από την ισότητα των τριγώνων παίρνουμε ότι $\widehat{\mathrm{MAP}} = \widehat{\mathrm{MBP}}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\mathrm{MAP}} = \widehat{\mathrm{MBP}} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{MB} \\ \widehat{\mathrm{PMA}} = \widehat{\mathrm{PMB}}\end{array}\right\}$$

Γνωρίζουμε *(§3.14)* ότι η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη οπότε $\widehat{\mathrm{PAO}} = \widehat{\mathrm{PBO}} = 90°$

Πλέον $\widehat{\mathrm{MAO}} = \widehat{\mathrm{PAO}} - \widehat{\mathrm{MAP}} = \widehat{\mathrm{PBO}} - \widehat{\mathrm{MBP}} = \widehat{\mathrm{MBO}}$.

Σημείωση: Κάποια μαθήτρια Αλ.Τσ. πρότεινε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM που είναι μια άλλη *(ίσως πιο απλή)* λύση επίσης.

Πράγματι τα τρίγωνα αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{OA}=\text{OB ως ακτίνες κύκλου} \\ \text{OM κοινή} \\ \text{AM}=\text{MB από α)} \end{array}\right\} \overset{\Pi\Pi\Pi}{\Rightarrow} \text{ είναι ίσα}$$

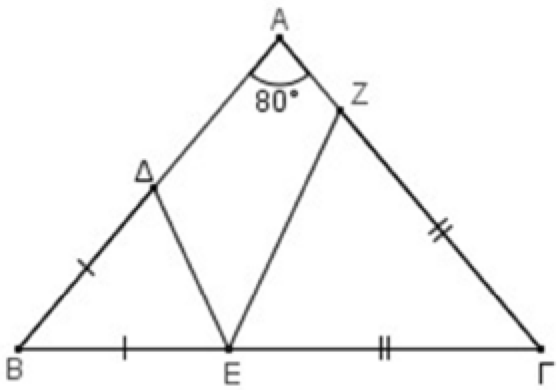
Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

ΘΕΜΑ 2_2814

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ είναι $\hat{A}$=80°. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ=ΒΕ και ΓΕ=ΓΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta E Z}$. (Μονάδες 10)



Λύση:

α) Αφού ΑΒΓ ισοσκελές

$$\hat{\text{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180°-\hat{\text{A}}}{2}=\frac{180°-80°}{2}=\frac{100°}{2}=50°$$

Επειδή ΒΕ=ΒΔ θα είναι

$$\hat{\Delta}_1=\hat{\text{E}}_1=\frac{180°-\hat{\text{B}}}{2}=\frac{180°-50}{2}=\frac{130°}{2}=65°$$

Επειδή ΓΕ=ΓΖ θα είναι

$$\hat{\text{Z}}_1=\hat{\text{E}}_2=\frac{180°-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180°-50°}{2}=\frac{130°}{2}=65°$$

β) $\widehat{\Delta\text{EZ}}=180°-\hat{\text{E}}_1-\hat{\text{E}}_2=180°-65°-65°=50°$

ΘΕΜΑ 2   6593

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

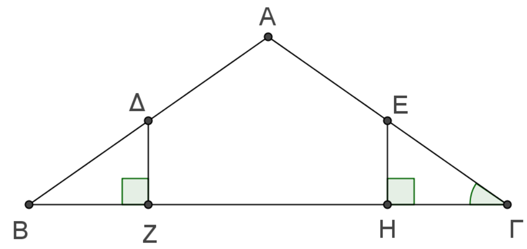
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ.Αυτά έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\hat{Z} = \hat{H} = 90° \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ B\Delta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = E\Gamma\end{array}\right\}$$ *(§ 3.6 Θεώρημα Ι)* είναι ίσα



οπότε θα έχουν και ΔΖ=ΕΖ δηλαδή τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ ισαπέχουν από την βάση ΒΓ.

β) Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} = 75° + \hat{B}$ οπότε αντικαθιστώντας στην

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow 75° + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180° \Rightarrow 75° + 3\hat{B} = 180° \Rightarrow 3\hat{B} = 180° - 75° \Rightarrow 3\hat{B} = 105° \Rightarrow$$

$$\hat{B} = \frac{105°}{3} \Rightarrow \hat{B} = 35°$$

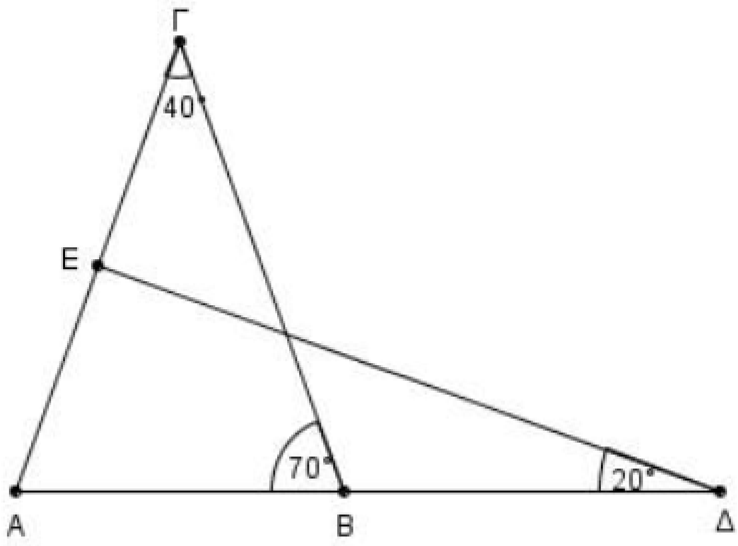
Αρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 35°$ και $\hat{A} = 75° + 35° = 110°$.

ΘΕΜΑ 2   6595

Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



Λύση:

α) Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \Rightarrow \hat{A}+70°+40°=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-70°-40° \Rightarrow \hat{A}=70°$.

Επειδή $\hat{A}=\hat{B}$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε:

$A\hat{E}\Delta+\hat{A}+\hat{\Delta}=180° \Rightarrow A\hat{E}\Delta+70°+20°=180° \Rightarrow A\hat{E}\Delta=180°-70°-20°=90°$.

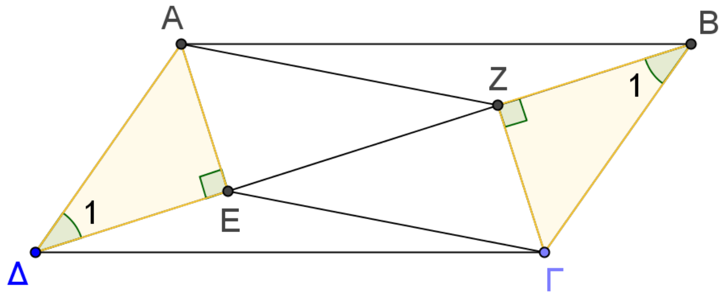
ΘΕΜΑ 2 2827

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

Λύση:



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{Z}}=90^\circ \\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma} \text{ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου} \\ \hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Delta}_1 \text{ ως εντός εναλλάξ}\end{array}\right\}$$

Αρα από §3.6 Θεώρημα Ι είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων παίρνουμε ΑΕ=ΓΖ.

Επιπλέον ΑΕ//ΓΖ ως κάθετες στην ΒΓ (§4.6 Πόρισμα Ι).

Αρα είναι ΑΕ=//ΓΖ οπότε από γνωστό κριτήριο (ii) το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2   3411 (5.2)

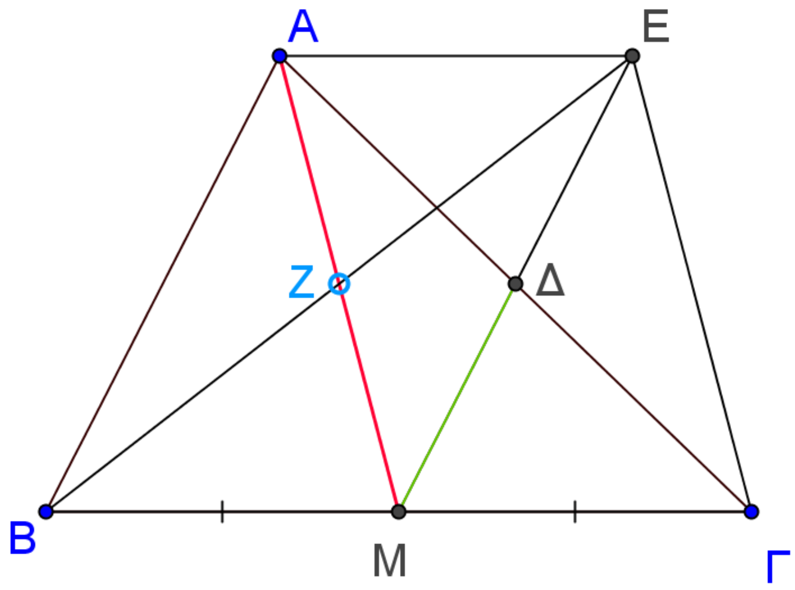
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

Λύση:



α) Αφού ΜΔ διάμεσος, Δ μέσο του ΑΓ οπότε ΑΔ=ΔΓ.Επιπλέον ΜΔ=ΜΕ, οπότε στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται οπότε σύμφωνα με γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αφού ΑΜΓΕ παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΕ//=ΜΓ.Αρα αφού ΜΓ=ΒΜ θα είναι και ΑΕ//=ΒΜ.

Επομένως και το ΑΕΜΒ παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

Συνεπώς οι διαγώνιοί του ΑΜ και ΒΕ διχοτομούνται δηλαδή η ΒΕ διέρχεται από το μέσο Ζ της ΑΜ.