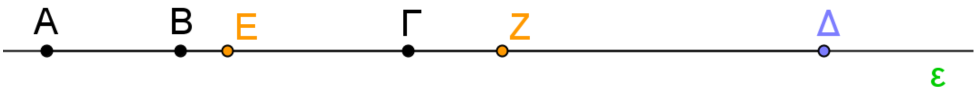
Γ1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ώστε $\mathrm{AB}<\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$, $\mathrm{B\Gamma}<\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}$ και ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{EZ}=\frac{\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}}{2}$$



Λύση:

Εστω Ο το μέσο του ΑΒ.

Τότε

$\mathrm{EZ}=\mathrm{OZ}-\mathrm{OE}$ **(1)**

Αλλά:

$\mathrm{OZ}=\mathrm{OB}+\mathrm{BZ}=\frac{\mathrm{AB}}{2}+\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Delta}}{2}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}$ **(2)** και

$\mathrm{OE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AO}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}-\frac{\mathrm{AB}}{2}=\frac{\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AB}}{2}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ **(3)**

$$\mathrm{EZ}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}-\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

Λύση μου (26-9-2015)

ΕΖ=ΑΔ-ΑΕ-ΖΔ

ΒΓ=ΒΕ+ΕΓ

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

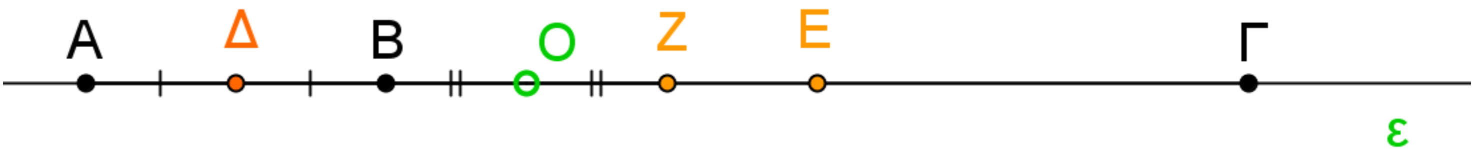
ΕΖ+ΒΓ=ΑΔ+ΒΕ-ΖΔ

$$\mathrm{EZ}+\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta}+\mathrm{BE}-\mathrm{Z\Delta}\Leftrightarrow\mathrm{EZ}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{BE}-\mathrm{BZ}\Leftrightarrow\mathrm{EZ}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{EZ}\Leftrightarrow 2\mathrm{EZ}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{EZ}=\frac{\mathrm{A\Delta}-\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Γ2. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.



Λύση:

Εστω Ο το μέσο του ΒΖ.Τότε ΒΟ=ΟΖ.Για να είναι το Ο μέσο και του ΔΕ αρκεί ΔΒ=ΖΕ (αφού ΟΒ=ΟΖ).

Πράγματι:

$$\Delta B=\frac{AB}{2}=\frac{A\Gamma-B\Gamma}{2}=\frac{A\Gamma}{2}-\frac{B\Gamma}{2}=\Gamma Z-\Gamma E=ZE$$

Γ3. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο του ΒΑ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AE} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

Λύση:

(Λύση σχολικού) Εχουμε:

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} + \mathrm{BE} = \mathrm{AB} + \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{2\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{2\mathrm{AB} + \mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta}{2} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma}}{2} + \frac{\mathrm{AB} + \Gamma\Delta}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} + \frac{\mathrm{AB} + \Gamma\Delta}{2} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$$

Λύση μου: (9/8/2005)

$$\mathrm{AE} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{AE} > \mathrm{A\Gamma}$$

$$2\mathrm{AE} = \mathrm{AE} + \mathrm{AE} = \mathrm{AE} + (\mathrm{AB} + \mathrm{BE}) = \mathrm{AE} + (\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{E}) = (\mathrm{AE} + \Delta\mathrm{E}) + \mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} + \mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$$

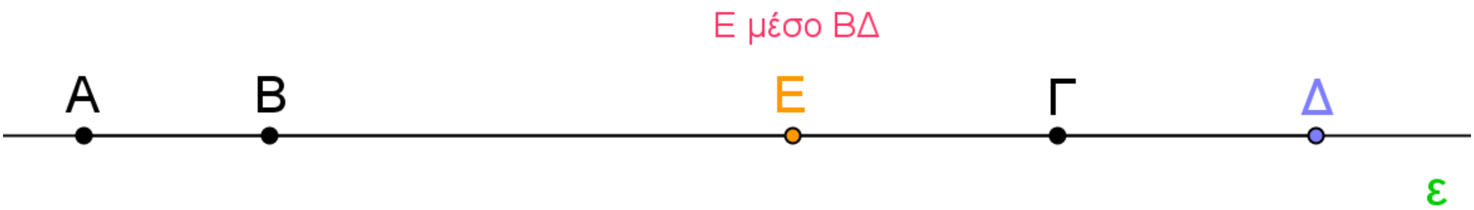
Λύση μου: (26/9/2015)

$$\mathrm{AE} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} + \mathrm{BE} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} + \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Delta}}{2} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} > \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} + \mathrm{A\Delta} > \mathrm{A\Gamma}$$

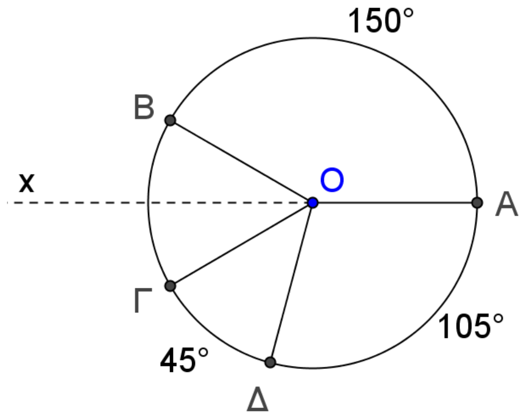
Παρατήρηση:

Ισχύουν οι αποδείξεις και στην περίπτωση που το Γ βρίσκεται μετά το Ε.



Γ4. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε $\overset{\frown}{AB} = 150°$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 45°$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = 105°$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας ΒÔΓ είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.

Λύση:



Εχουμε:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A} = 360° \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 360° - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{\Delta A} \Leftrightarrow$$

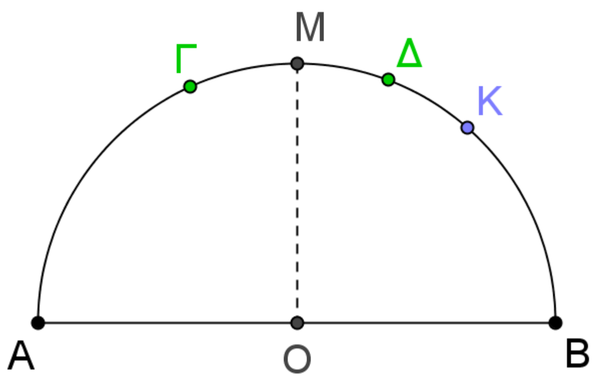
$$\overset{\frown}{B\Gamma} = 360° - 150° - 45° - 105° \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 360° - 300° \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$$

Αφού Οχ διχοτόμος της $B\hat{O}\Gamma$ είναι $B\hat{O}x = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

Επομένως:

$A\hat{O}B + B\hat{O}x = 150° + 30° = 180° \Leftrightarrow A\hat{O}x = 180°$ δηλαδή η γωνία $A\hat{O}x$ είναι ευθεία που σημαίνει ότι οι ημιευθείες ΟΑ και Οχ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Γ5. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και Κ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΜ Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AK}$ και $\overset{\frown}{MK}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου ΓΔ.



Λύση:

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma K} - \overset{\frown}{K\Delta}$$

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma M} + \overset{\frown}{M\Delta}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma K} + \overset{\frown}{\Gamma M}$$

$$2\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma M}$$

$$2\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{AM}$$

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45°$$

Λύση σχολικού:

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{M\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{AM} + \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AK}}{2} = \overset{\frown}{AM} - \left(\frac{\overset{\frown}{AK}}{2} - \frac{\overset{\frown}{MK}}{2}\right) = \overset{\frown}{AM} - \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$