2.1-2.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ **(Version 23-9-2015)**

Κ1. *Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:*

i) *κανένα κοινό σημείο ii) ένα κοινό σημείο*

iii) δύο κοινά σημεία iv) άπειρα κοινά σημεία

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

i) Ναι, όταν είναι παράλληλες.

ii) Ναί, όταν τέμνονται.

iii) Οχι, γιατί από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.

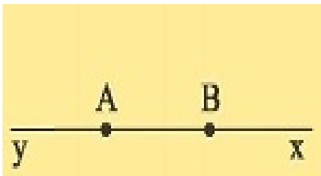
iv) Οχι γιατί άν είχαν άπειρα θα είχαν και δύο κοινά οπότε θα ταυτίζονταν και δεν θα ήταν διαφορετικές.

Κ2. Στο διπλανό σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:

i) με αρχή το Α,

ii) με αρχή το Β ;

Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;



Απάντηση:

i) Αy και Αχ

ii) Βy και Βχ

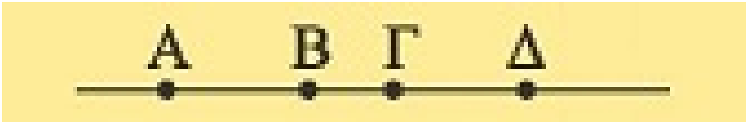
Αντικείμενες είναι η Αy με την Αχ και η Βy με την Βχ.

Κ3. Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά.Αν:

- το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και
- το Γ μεταξύ των Α, Δ,

να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.

Απάντηση:



- Αφού Β μεταξύ των Α, Γ θα ισχύει

ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ **(1)**

- Αφού το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ θα ισχύει

ΑΔ=ΑΓ+ΓΔ **(2)**

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

ΑΓ+ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+ΓΔ⇔ ΑΔ-ΑΒ=ΒΓ+ΓΔ (3)

Απομένει να αποδείξουμε ότι ΑΔ-ΑΒ=ΒΔ

Για τα σημεία Α, Β, Δ θεωρώντας τα τρία δυνατά σχήματα (το Α ανήκει στο ΒΔ , το Δ ανήκει στο ΑΒ, το Β ανήκει στο ΑΔ) προκύπτουν οι παρακατω σχέσεις.

- ΒΔ=ΑΔ+ΑΒ ή
- ΒΔ=ΑΒ-ΑΔ ή
- ΒΔ=ΑΔ-ΑΒ

- Αν ήταν ΒΔ=ΑΔ+ΑΒ (4) τότε από την (3)

$$\text{ΒΓ+ΓΔ=ΑΔ-ΑΒ<ΑΔ<ΑΔ+ΑΒ} \overset{(4)}{=} \text{ΒΔ}$$

Δείξαμε ότι ΒΓ+ΓΔ<ΒΔ αυτο όμως είναι άτοπο.

- Αν ήταν ΒΔ=ΑΒ-ΑΔ (5) τότε από τις (3) έχουμε:

$\text{ΒΓ+ΓΔ= ΑΔ-ΑΒ} \overset{(5)}{=} \text{-ΒΔ} \Leftrightarrow$ ΒΓ+ΓΔ+ΒΔ=0 πράγμα επίσης άτοπο (αφού δεν γίνεται το άθροισμα θετικών αριθμών να δίνει 0)

- Αρα ως μόνη δυνατή επιλογή μένει η ΒΔ=ΑΔ-ΑΒ οπότε η (3) γίνεται:

ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ

που σημαίνει ότι το Γ είναι μεταξύ των Β και Δ.

Σημείωση: *Αυτή η άσκηση που τόσο ανέμελα την έβαλαν στις ασκήσεις κατανόησης υπάρχει και σε παλιότερο σχολικό (1992 Αλιμπινίσης Κοντογιάννης κλπ) απ' όπου έχω κάνει προσαρμογή.Φαίνεται ότι η λύση δεν είναι και τόσο απλή*.

Κ4. Οι ημιευθείες Οx' και Οx του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;

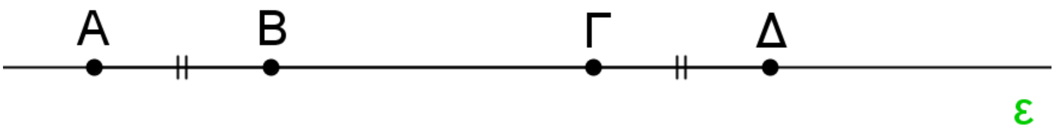
Απάντηση:

Δεν είναι αντικείμενες γιατί ναί μέν έχουν ως μόνο κοινό σημείο την αρχή τους, αλλά δεν έχουν τον ίδιο φορέα όπως απαιτεί ο ορισμός των αντικείμενων ευθειών.

Εμπέδωσης

Ε3. Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.

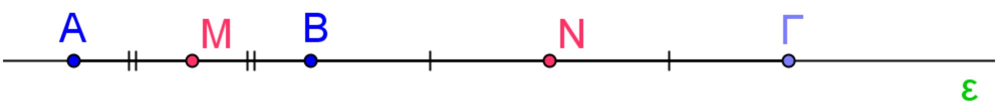
Λύση:



ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=ΓΔ+ΒΓ=ΒΔ   *(αφού ΑΒ=ΓΔ)*

Ε4. Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.

Λύση:



ΑΓ=ΑΜ+ΜΒ+ΒΝ+ΝΓ=ΜΒ+ΜΒ+ΒΝ+ΒΝ=2ΜΒ+2ΒΝ=2(ΜΒ+ΒΝ)=2ΜΝ

Σημειώσεις: **1.** Οταν λύναμε την άσκηση στην τάξη και είχαμε φτάση στην 2ΜΒ+2ΒΝ, ρώτησα αν μπορούμε εδώ να κάνουμε παραγοντοποίηση και αρκετά παιδιά (προς έκπληξή μου) είπαν ότι βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2Β.Τους είπα ότι στην άλγεβρα αν είχαμε 2βγ+2βα=2β(α+γ) αλλά εδώ τα Μ και το Β δεν διαχωρίζονται αφού το ΜΒ δηλώνει ένα ευθύγραμμο τμήμα.

2. Κάποιο παιδί ρώτησε γιατί δεν αντικαθιστούμε το ΑΜ με το ΜΒ και τους είπα ότι το ΜΒ «περιέχεται» στο ΜΝ στο οποίο θέλουμε να φτάσουμε ενώ το ΑΜ είναι έξω από αυτό.Ναι μέν η διαδικασία θα ήταν σωστή αλλά θα καταλήγαμε σε κάτι διαφορετικής μορφής από αυτό που μας ζητάνε:

ΑΓ=ΑΜ+ΜΒ+ΒΝ+ΝΓ=ΑΜ+ΑΜ+ΝΓ+ΝΓ=2ΑΜ+2ΝΓ=2(ΑΜ+ΝΓ)

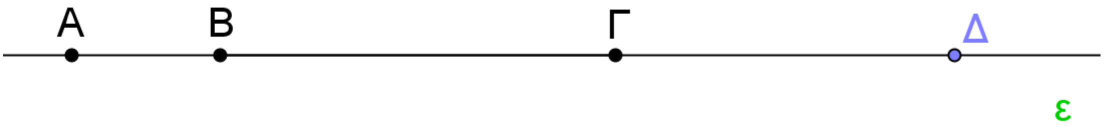
Αποδεικτικές

***<u>Σημείωση</u>**: Την άσκηση Αποδεικτική 1 του σχολικού την χώρισα σε δύο χωριστές ασκήσεις και άλλαξα και την σειρά των ερωτημάτων.Αυτό το έκανα γιατί το (2^{ο} ερώτημα) είχε ευκολότερο σχήμα.*

Α1i. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*

ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ

<u>Λύση:</u>



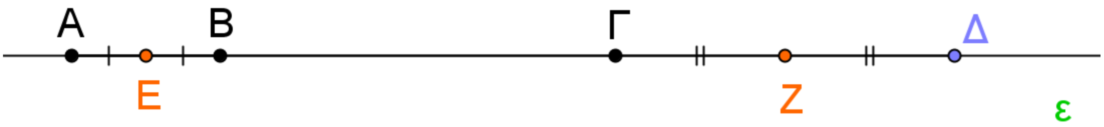
i) Εχουμε: ΑΓ+ΒΔ=(ΑΒ+ΒΓ)+ΒΔ=ΑΒ+(ΒΓ+ΒΔ)=ΑΒ+(ΒΔ+ΒΓ) (ΑΒ+ΒΔ)+ΒΓ=ΑΔ+ΒΓ.

(χρησιμοποίησα πιο αναλυτικά από το Σχολικό την αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα)

Α1ii. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2}$$

<u>Λύση:</u>



i) ΑΔ=ΑΕ+ΕΖ+ΖΔ και ΒΓ=ΕΖ-ΕΒ-ΓΖ, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη:

ΑΔ+ΒΓ=2ΕΖ *(ΑΕ=ΕΒ, ΖΔ=ΓΖ).* $2\mathrm{EZ} = \mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2}$

<u>Παραλλαγή:</u>

ΕΖ=ΕΒ+ΒΓ+ΓΖ

ΕΖ=ΑΔ-ΑΕ-ΖΔ

Προσθέτουμε κατά μέλη:

2ΕΖ=ΑΔ+ΒΓ $\Leftrightarrow \mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2}$

A2. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ*

i) *Αν, Δ τυχαίο εξωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ, να αποδείξετε ότι:*

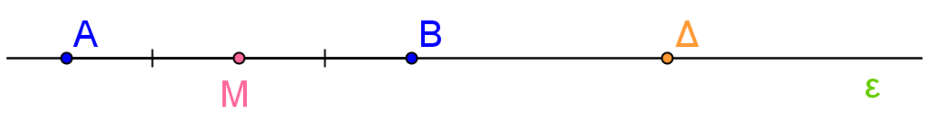
$$\Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}$$

ii) *Αν, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ να αποδείξετε ότι:*

$$\Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$$

Λύση:

i)



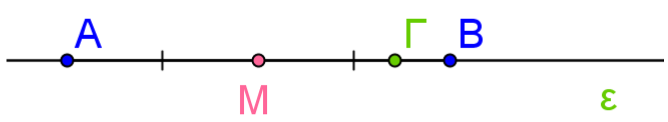
Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta A = AM + \Delta M \\ \Delta B = \Delta M - BM\end{array}\right\} \text{Προσθέτοντας κατά μέλη: } \Delta A + \Delta B = 2\Delta M \;\Leftrightarrow \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}$$

2^{ος} τρόπος

$$\Delta M = \Delta B + BM \;= \frac{\Delta B}{2} + \frac{\Delta B}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{\Delta B}{2} + \frac{\Delta B + AB}{2} = \frac{\Delta B}{2} + \frac{A\Delta}{2} = \frac{\Delta B + A\Delta}{2} = \frac{A\Delta + \Delta B}{2}$$

ii)



Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma A = \Gamma M + MA \\ \Gamma B = MB - \Gamma M\end{array}\right\} \text{Αρα } \Gamma A - \Gamma B = 2\Gamma M \;\left(MA = MB\right) \Leftrightarrow \Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$$

2^{ος} τρόπος

$$\Gamma M = \Gamma A - AM = \frac{\Gamma A}{2} + \frac{\Gamma A}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma A}{2} + \frac{\Gamma A - AB}{2} = \frac{\Gamma A}{2} - \frac{AB - \Gamma A}{2} = \frac{\Gamma A}{2} - \frac{\Gamma B}{2} = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$$

Σημείωση: Είπα κάπως αόριστα, στους μαθητές ότι σχέση που έχει κλάσμα με παρονομαστή το 2 κάποιες φορές προκύπτει από πρόσθεση δύο σχέσεων.

Ενας μαθητής (Ηλιάδης) με ρώτησε:Δεν υπάρχει μια μέθοδος να λύνουμε αυτές τις ασκήσεις;

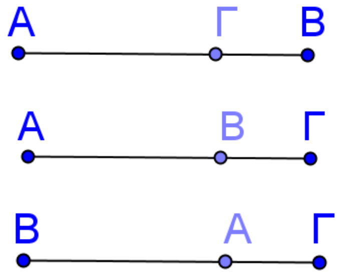
Του απάντησα ότι μια ιδέα είναι αυτό που τους είπα αλλά αυτή η παρατήρηση με έκανε να προσπαθήσω να βρώ άλλες εναλλακτικές της λύσεως του βιβλίου και έτσι κατέληξα στους 2^{ους} τρόπους.Ενδεχομένως να υπάρχει κι άλλος.

Α3. ***α)*** *Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α,Β,Γ, ισχύει ΑΒ ≤ ΑΓ+ΓΒ.*

β) *Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι ΑΔ ≤ ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ.*

Λύση:

α) *Διακρίνουμε τις παρακάτω 3 περιπτώσεις*



i) *Αν το Γ είναι μεταξύ των Α και Β τότε ΑΒ=ΑΓ+ΓΒ*

ii) *Αν το Β είναι μεταξύ των Α και Γ τότε ΑΒ<ΑΓ, οπότε ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ*

iii) *Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε ΑΒ<ΓΒ, οπότε ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ.*

Αρα πάντα έχουμε ΑΒ≤ΑΓ+ΓΒ.

β) *Για τα Α, Β, Γ ισχύει ΑΒ≤ΑΓ+ΓΒ (1) ενώ για τα Α, Β, Δ ισχύει ΑΔ≤ΑΒ+ΒΔ* (2)

Απο την (2) και χρησιμοποιώντας την (1) προκύπτει ότι ΑΔ≤ ΑΒ+ΒΔ≤ ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ .

Παραλλαγή λύσης:

ΑΔ≤ΑΓ+ΓΔ και ΓΔ≤ΓΒ+ΒΔ οπότε

ΑΔ≤ΑΓ+ΓΔ≤ ΑΓ+ ΓΒ+ΒΔ

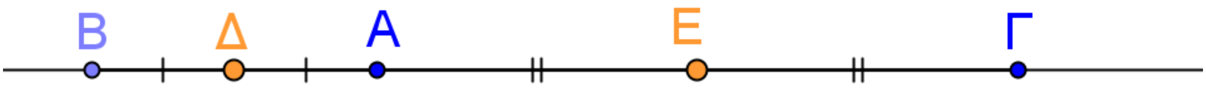
Σύνθετες

Σ1. *Αν Α,Β,Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

$$\mathrm{\Delta E} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

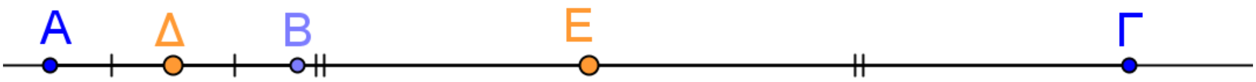
Λύση:

► Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε:



$$\mathrm{\Delta E} = \mathrm{A\Delta} + \mathrm{AE} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

► Αν το Α είναι στην προέκταση του ΒΓ π.χ προς το μέρος του Β τότε:



$$\mathrm{\Delta E} = \mathrm{AE} - \mathrm{A\Delta} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} - \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

2ος τρόπος

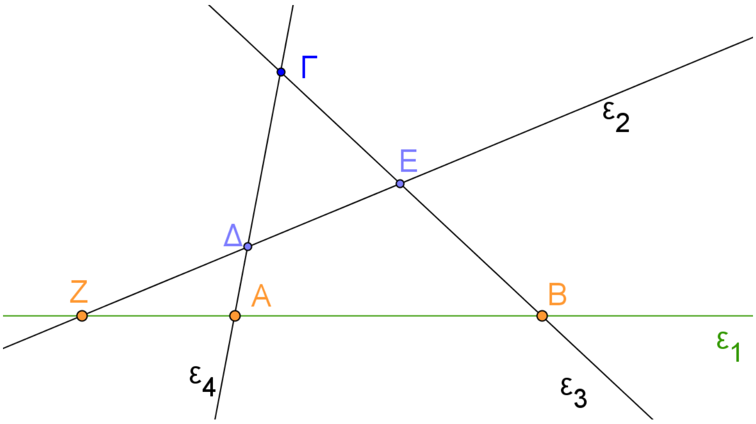
$$\mathrm{\Delta E} = \mathrm{\Delta B} + \mathrm{BE} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \mathrm{BE} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{2\mathrm{BE}}{2} = \frac{\mathrm{AB}+2\mathrm{BE}}{2} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BE}+\mathrm{BE}}{2} = \frac{\mathrm{AE}+\mathrm{BE}}{2} = \frac{\mathrm{E\Gamma}+\mathrm{BE}}{2} =$$

$$\frac{\mathrm{BE}+\mathrm{E\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

Σ2.Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται;

- Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους ($\nu \geq 2$).

Λύση:



Αν παραστήσουμε με ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, τις τέσσερις ευθείες οδούς αρκεί να βρούμε πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών.

Σε κάθε ευθεία π.χ την ε_1 οι άλλες (4-1)=3 ευθείες ορίζουν (4-1)=3 σημεία.Αρα συνολικά θα ορίζονταν 4(4-1)=12 σημεία.

Αλλα κάθε σημείο το υπολογίσαμε 2 φορές π.χ το Α ως σημείο της ε_1 και της ε_2.Επομένως τελικά ορίζονται:

$\frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ σημεία. Συμπεραίνουμε ότι χρειάζονται 6 τροχονόμοι.

- Σκεπτόμενοι παρόμοια οι ν ευθείες ορίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ σημεία.