

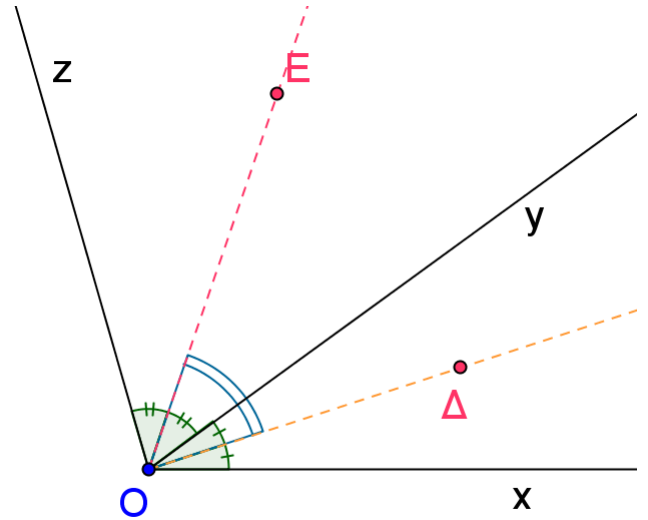
2.11-2.16 Αποδεικτικές ασκήσεις (Version 23-9-2015)

A1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημίθροισμα των γωνιών αυτών.

Λύση:

Εστω \hat{xOy} και \hat{yOz} δύο εφεξής γωνίες και OD και OE οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

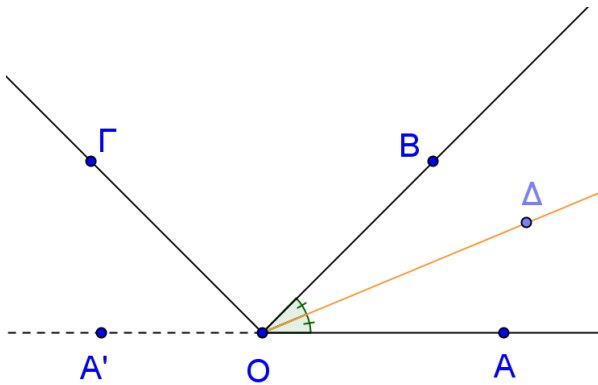
$$\hat{\Delta OE} = \hat{\Delta Oy} + \hat{yOE} = \frac{\hat{xOy}}{2} + \frac{\hat{yOz}}{2} = \frac{\hat{xOy} + \hat{yOz}}{2}$$



A2. Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της OD και τυχαία ημιευθεία OG εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου OA η αντικείμενη ημιευθεία της OA . Να αποδείξετε ότι:

$$\hat{\Gamma O\Delta} = \frac{\hat{\Gamma O A} + \hat{\Gamma O B}}{2}$$

Λύση:



Εχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Gamma O A} &= \hat{\Gamma O \Delta} + \hat{\Delta O A} \\ \hat{\Gamma O B} &= \hat{\Gamma O \Delta} - \hat{\Delta O B} \end{aligned} \right\} \text{Αρα (προσθέτοντας κατά μέλη):}$$

$$\hat{\Gamma O A} + \hat{\Gamma O B} = 2\hat{\Gamma O \Delta} \quad (\hat{\Delta O A} = \hat{\Delta O B}) \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma O \Delta} = \hat{\Gamma O A} + \hat{\Gamma O B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma O \Delta} = \frac{\hat{\Gamma O A} + \hat{\Gamma O B}}{2}.$$

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσετε ότι τόσο σαν εκφώνηση όσο και σαν λύση είναι αντίστοιχη της A2 ii) του σχολικού στα ευθύγραμμα τμήματα μόνο που εκεί έχουμε μέσο ευθυγράμμου τμήματος και εδώ διχοτόμο γωνίας.

A3. Θεωρούμε κυρτή γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$, τη διχοτόμο της $ΟΔ$ και τυχαία ημιευθεία $ΟΓ$ εσωτερική της γωνίας $\widehat{Δ\hat{O}B}$.

$$\widehat{Γ\hat{O}Δ} = \frac{\widehat{Γ\hat{O}A} - \widehat{Γ\hat{O}B}}{2}$$

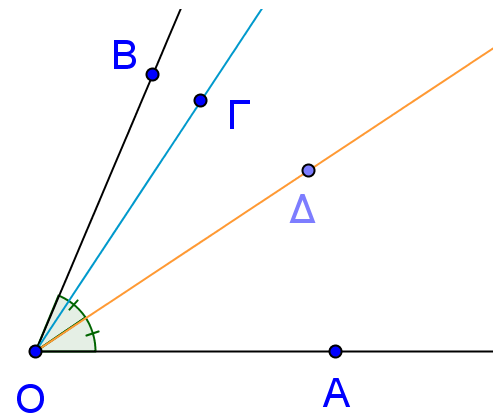
Λύση:

Εχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{Γ\hat{O}A} = \widehat{Γ\hat{O}Δ} + \widehat{Δ\hat{O}A} \\ \widehat{Γ\hat{O}B} = \widehat{Δ\hat{O}B} - \widehat{Γ\hat{O}Δ} \end{array} \right\} \text{Αρα (αφαιρώντας κατά μέλη):}$$

$$\widehat{Γ\hat{O}A} - \widehat{Γ\hat{O}B} = 2\widehat{Γ\hat{O}Δ} \quad (\widehat{Δ\hat{O}A} = \widehat{Δ\hat{O}B}) \Leftrightarrow 2\widehat{Γ\hat{O}Δ} = \widehat{Γ\hat{O}A} - \widehat{Γ\hat{O}B} \Leftrightarrow \widehat{Γ\hat{O}Δ} = \frac{\widehat{Γ\hat{O}A} - \widehat{Γ\hat{O}B}}{2}.$$

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσετε ότι τόσο σαν εκφώνηση όσο και σαν λύση είναι αντίστοιχη της A2 i) του Σχολικού στα ευθύγραμμα τμήματα μόνο που εκεί έχουμε μέσο ευθυγράμμου τμήματος και εδώ διχοτόμο γωνίας.



§2.11-2.16 Σύνθετα θέματα

Σ1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Ox , Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\widehat{x\hat{O}y} = \frac{\widehat{A\hat{O}\Delta} + \widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2}$$

Λύση:

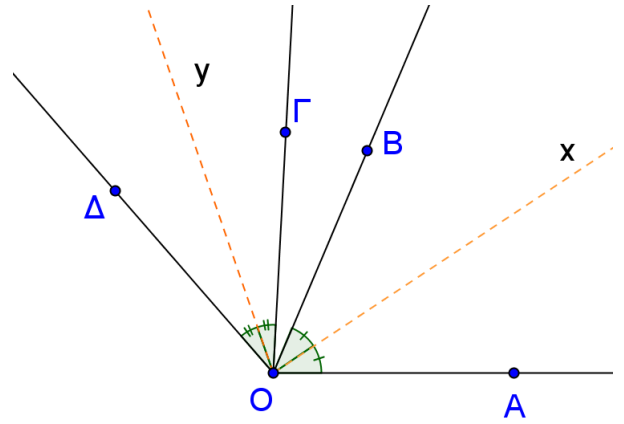
Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A\hat{O}\Delta} &= \widehat{A\hat{O}x} + \widehat{x\hat{O}y} + \widehat{y\hat{O}\Delta} \\ \widehat{B\hat{O}\Gamma} &= \widehat{x\hat{O}y} - \widehat{B\hat{O}x} - \widehat{\Gamma\hat{O}y} \end{aligned} \right\} \text{Άρα (προσθέτοντας κατά μέλη) και επειδή } \widehat{A\hat{O}x} = \widehat{B\hat{O}x} \text{ και } \widehat{y\hat{O}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{O}y}$$

έχουμε:

$$\widehat{A\hat{O}\Delta} + \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 2\widehat{x\hat{O}y} \Leftrightarrow 2\widehat{x\hat{O}y} = \widehat{A\hat{O}\Delta} + \widehat{B\hat{O}\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{x\hat{O}y} = \frac{\widehat{A\hat{O}\Delta} + \widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2}.$$

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσετε ότι τόσο σαν εκφώνηση όσο και σαν λύση είναι αντίστοιχη της Α1 i) του Σχολικού στα ευθύγραμμα τμήματα μόνο που εκεί έχουμε μέσο ευθυγράμμου τμήματος και εδώ διχοτόμο γωνίας.



Σ2. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $OG \perp OA$. Αν OD , OE οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A\hat{O}B}$ και $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{D\hat{O}E} = \frac{1}{2} \square$$

Λύση:

Έχουμε

$$\widehat{D\hat{O}E} = \widehat{B\hat{O}D} - \widehat{B\hat{O}E} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2} - \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{A\hat{O}B} - \widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{A\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{1}{2} \square$$

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσετε ότι τόσο σαν εκφώνηση όσο και σαν λύση είναι αντίστοιχη της Σ1 του Σχολικού στα ευθύγραμμα τμήματα μόνο που εκεί έχουμε μέσο ευθυγράμμου τμήματος και εδώ διχοτόμο γωνίας. Η διαφορά είναι ότι εδώ δίνει ότι μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 1 \square$. Φυσικά θα μπορούσε να δώσει οποιοδήποτε άλλο μέτρο χωρίς να αλλάξει η πορεία λύσης.

