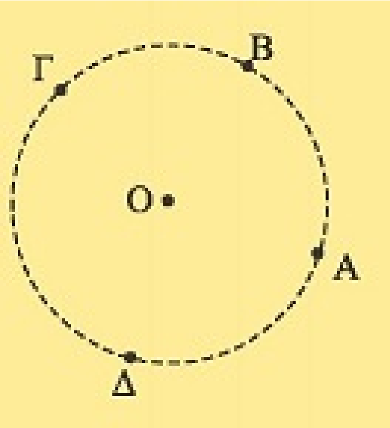
2.19 ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ (Version 5-10-2015)

Κ1. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:

i) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}$

ii) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

iii) $\overset{\frown}{AB\Gamma}-\overset{\frown}{B\Gamma}$



Απάντηση:

i) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}=\overset{\frown}{AB\Gamma}$

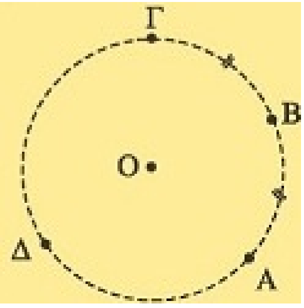
ii) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{A\Gamma\Delta}$

iii) $\overset{\frown}{AB\Gamma}-\overset{\frown}{B\Gamma}=\overset{\frown}{AB}$

Κ2. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:

i) $2\overset{\frown}{AB}$

ii) $2\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$



Απάντηση:

i) $2\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

ii) $2\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{A\Gamma\Delta}$

Κ3. Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:

α. αρνητικός **β.** μηδέν **γ.** θετικός **δ.** μη αρνητικός.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Απάντηση

γ. «Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής.Ο αριθμός αυτός λέγεται **μέτρο** του τόξου.»

Παρατήρηση: Το σχολικό ενώ αναφέρεται σε μηδενική γωνία § 2.12 αλλά όχι σε μηδενικό τόξο (γι' αυτό επέλεξα το γ αντί του δ). Επίσης ενώ αναφέρει το μέτρο ευθείας και πλήρους γωνίας δεν κάνει μνεία για μέτρο της μηδενικής γωνίας.

Κ4. Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;

Απάντηση:

Μέτρο μια γωνίας, ορίζεται ως το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει όταν την καταστήσουμε επίκεντρη σε έναν κύκλο.

Κ5. Αν $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ = μ° (παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία ΑΚΒ θα είναι μ°;

Απάντηση:

Οχι γιατί η γωνία δεν είναι επίκεντρη

Μάλιστα με πιο κάτω θεωρία μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathrm{A\hat{K}B} < \mu°$

§ 2.19 ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

Ε1. Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, ώστε $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$

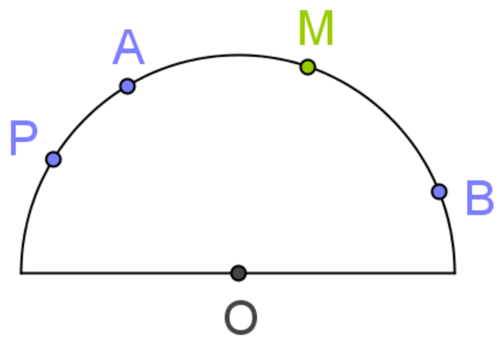
i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο ΑΒ, να αποδείξετε ότι

$$\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}\right)$$

ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$, να αποδείξετε ότι

$$\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}\right)$$

Λύση:



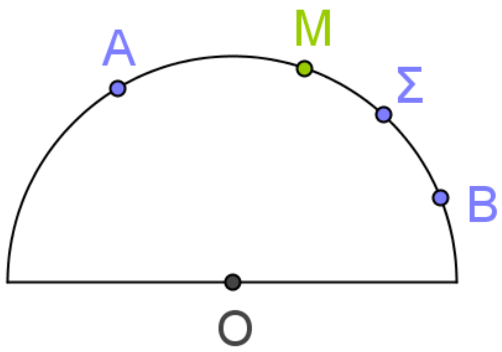
i) $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM}$

$\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PB} - \overset{\frown}{MB}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{PB} - \overset{\frown}{MB} \overset{\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}}{\Leftrightarrow} 2\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}\right)$$



ii) $\overset{\frown}{\Sigma M} = \overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{AM}$

$\overset{\frown}{\Sigma M} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma B}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\overset{\frown}{\Sigma M} = \overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma B} \overset{\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}}{\Leftrightarrow} 2\overset{\frown}{\Sigma M} = \overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}\right)$$

Ε2. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} - \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 80°$.

Να βρείτε τα μέτρα

i) των τόξων $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$.

ii) των γωνιών ΑÔΓ και ΓÔΒ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

Λύση:

$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} - \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 80° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} + 80°$.

$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} + \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 180° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} + 80° + \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 180° \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 180° - 80° \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 100° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{100°}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 50°$

Αρα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} + 80° = 50° + 80° = 130°$

ii) Η ΑÔΓ είναι επίκεντρι που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ επομένως $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$

Ε3. Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.

Λύση:

Εστω $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ δύο συμπληρωματικές γωνίες με $\hat{\omega} = 2\hat{\varphi}$

$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90°$ ή $2\hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 90°$ ή $3\hat{\varphi} = 90°$ ή $\hat{\varphi} = \frac{90°}{3} = 30°$ οπότε $\hat{\omega} = 2\hat{\varphi} = 2 \cdot 30° = 60°$

Ε4. Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;

Λύση:

$\hat{\omega} = \frac{6}{5}$ ορθής$= \frac{6}{5} 90° = 6 \cdot 18° = 108°$

Αρα η παραπληρωματική της είναι $180° - 108° = 72°$

Η γωνία $\hat{\omega}$ δεν έχει παραπληρωματική αφού είναι αμβλεία γωνία.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

Α1. Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.

Λύση:

Η παραπληρωματική της ω είναι $180° - \omega$ και

η συμπληρωματική της ω είναι $90° - \omega$.

Σύμφωνα με τα δεδομένα:

Παραπληρωματική =3*συμπληρωματική

$$180° - \omega = 3(90° - \omega) \Leftrightarrow 180° - \omega = 270° - 3\omega \Leftrightarrow 3\omega - \omega = 270° - 180° \Leftrightarrow 2\omega = 90° \Leftrightarrow \omega = 45°$$

Α2. Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.

Λύση:

Η συμπληρωματική της φ είναι $90° - \varphi$.Από τα δεδομένα έχουμε ότι

$$\varphi = (90° - \varphi) - 20° \Leftrightarrow \varphi = 90° - 20° - \varphi \Leftrightarrow 2\varphi = 70° \Leftrightarrow \varphi = 35°$$

και η συμπληρωματική της $\varphi + 20° = 35° + 20° = 55°$

Α3. Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ, ΓÔΔ, ΔÔΑ, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.

Λύση:

Εχουμε:

$$\frac{\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}}{1} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \frac{\Delta\hat{O}\mathrm{A}}{4}$$

Θέτουμε

$$\frac{\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}}{1} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \frac{\Delta\hat{O}\mathrm{A}}{4} = \lambda$$

Τότε $\frac{\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}}{1} = \lambda \Leftrightarrow \mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B} = \lambda$

$$\frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \lambda \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 2\lambda$$

$$\frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \lambda \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = 3\lambda$$

$$\frac{\Delta\hat{O}\mathrm{A}}{4}=\lambda \Leftrightarrow \Delta\hat{O}\mathrm{A}=4\lambda$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}+B\hat{O}\Gamma+\Gamma\hat{O}\Delta+\Delta\hat{O}\mathrm{A}=\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda \Leftrightarrow 360^\circ=10\lambda \Leftrightarrow 10\lambda=360^\circ \Leftrightarrow \lambda=36^\circ$$

Αρα $\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}=36^\circ$

$B\hat{O}\Gamma=2\cdot 36^\circ=72^\circ$

$\Gamma\hat{O}\Delta=3\cdot 36^\circ=108^\circ$

$\Delta\hat{O}\mathrm{A}=4\cdot 36^\circ=144^\circ$