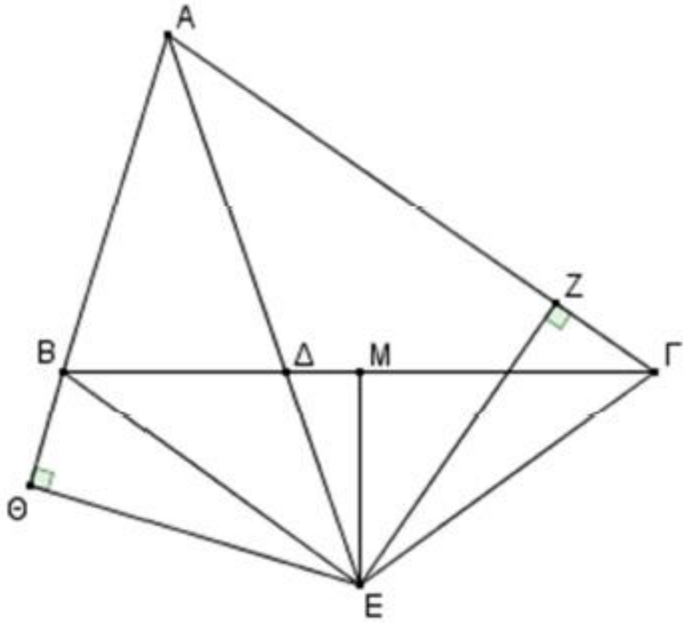
ΘΕΜΑ 4 **2787**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$ (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ:

α) Αφού Ε σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ θα έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τα άκρα του *(Πόρισμα iii σ.37)* δηλαδή:

ΕΒ=ΕΓ οπότε ΕΒΓ ισοσκελές.

β) Αφού Ε σημείο της διχοτόμου ΑΔ θα έχει την ιδιότητα ΕΘ=ΕΖ. *(Θεώρημα IV σ.37)*

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ έχουν

$\left.\begin{array}{l} EB = E\Gamma \\ E\Theta = EZ \end{array}\right\} \Rightarrow$ Αρα *(Θεώρημα ΙΙ σ457)* είναι ίσα οπότε θα έχουν $A\hat{\Gamma}E = E\hat{B}\Theta$ (*)

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E \overset{(*)}{=} E\hat{B}\Theta + A\hat{B}E = A\hat{B}\Theta = 180°$

ΘΕΜΑ 4 **2796**

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.

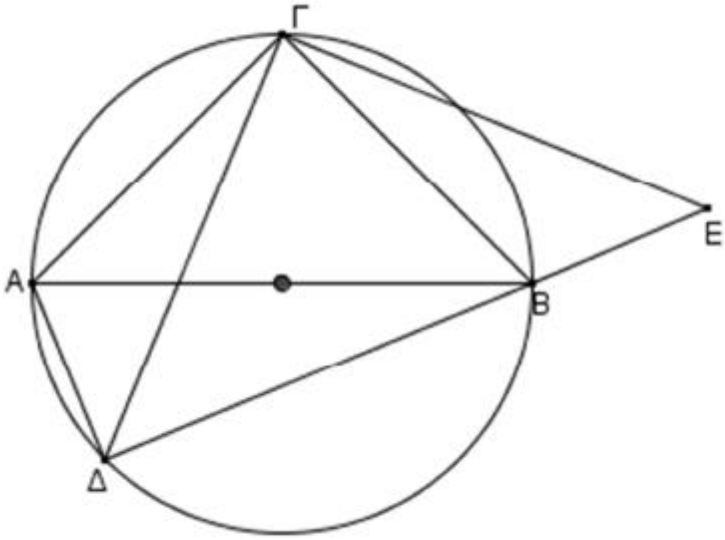
(Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ:

α) i) Γ μέσο του τόξου ΑΒ άρα τόξο ΑΓ = τόξο ΓΒ, οπότε και ΑΓ=ΓΒ *(Πόρισμα IV) σ. 37 σχολικού)*

ΑΓΒΔ εγγεγραμμένο τετράπλευρο άρα οι απέναντι γωνίες του θα είναι παραπληρωματικές: *(σ.130)*

$\Gamma\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{B}\Delta = 180°$ (1)

Ομως και $\Gamma\hat{B}\Delta + \Gamma\hat{B}E = 180°$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$

Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta = BE \ \text{δεδομένα} \\ \Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E \\ A\Gamma = \Gamma B \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα οπότε θα έχουν } A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E \ (*)$$

ii) $A\hat{\Gamma}B = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο *(Πόρισμα ii σ.124)*

$\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}B = 90°$.Αρα $\Delta\Gamma \perp \Gamma E$

β) Αν ΔΓ διάμετρος, τότε θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου και το τμήμα ΟΓ θα είναι ακτίνα του κύκλου.Τότε, αφού όπως αποδείξαμε στο ii) $\Delta\Gamma \perp \Gamma E$ θα είναι και $O\Gamma \perp \Gamma E$ οπότε ΓΕ εφαπτομένη του κύκλου.