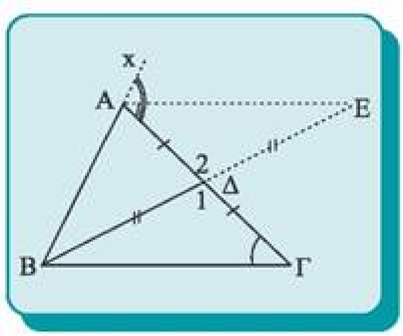
1ο φυλλάδιο Ανισοτικές σχέσεις

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα *(Πρόταση **I 16** στα Στοιχεία του Ευκλείδη)*

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα δείξουμε ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ, και στην προέκτασή της προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \Gamma\hat{A}x > \Gamma\hat{A}E$ **(1)**

Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} B\Delta = \Delta E \\ \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \ \text{κατακορυφήν} \\ A\Delta = \Delta\Gamma \end{array}\right\} \text{(ΠΓΠ), οπότε } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$$

Από την τελευταία ισότητα και την **(1)** προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$.

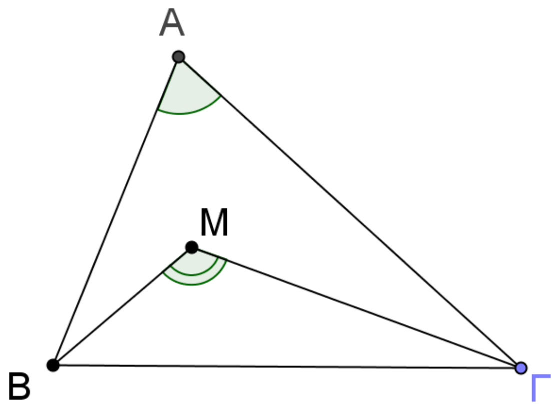
Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$. (εδώ θα φέρουμε την διάμεσο από την κορυφή Γ)

Σημείωση: *Σαν μνημονικό κανόνα την διάμεσο την φέρνουμε από την τρίτη κορυφή.Ετσι για να δείξουμε ότι $A_{\varepsilon\xi}$> Β θα φέρουμε την διάμεσο από την Γ.*

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

$B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

Απόδειξη



(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία ΒΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως $B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$.

Αλλά η Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$.

Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°. *(Πρόταση Ι 17 στα Στοιχεία του Ευκλείδη)*

Απόδειξη:

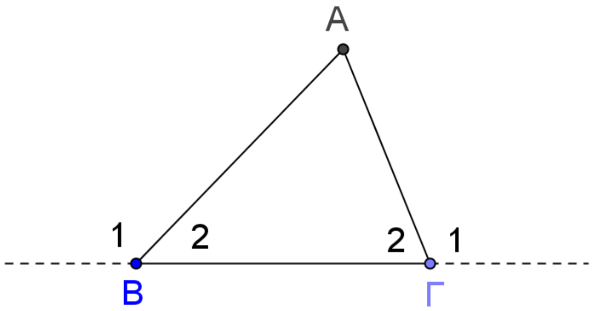
(i) Εστω ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή ή αμβλεία.Τότε η $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ που είναι παραπληρωματική της θα είναι ορθή ή οξεία δηλαδή $\hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$.Αλλά $\hat{A} < \hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$ δηλαδή $\hat{A} < 90°$ και $\hat{\Gamma} < \hat{B}_{\varepsilon\xi} \le 90°$ δηλαδή $\hat{\Gamma} < 90°$.

(ii) Ας δείξουμε ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180°$

Είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180° - \hat{B} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180° > \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180°$

Ε1. Στο δίπλα σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.

Λύση:



$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$.Αλλά και $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_2$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει

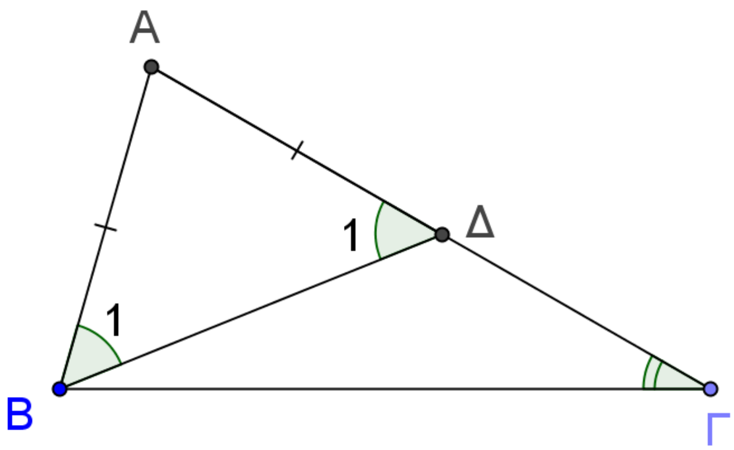
$2\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 \Leftrightarrow 2\hat{B}_1 > 180° \Leftrightarrow \frac{2\hat{B}_1}{2} > \frac{180°}{2} \Leftrightarrow \hat{B}_1 > 90°$.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και **αντίστροφα**

Απόδειξη :

Ευθύ:



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$. Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1)

Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$ οπότε λόγω της (1) $\hat{B} > \hat{\Delta}_1$ (2). Η $\hat{\Delta}_1$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$ (3). Από (2) και (3) προκύπτει $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφο:.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και β>γ, γιατί:

- Αν ήταν $\beta = \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς) που είναι άτοπο.
- Αν ήταν β<γ θα είχαμε από το **ευθύ** $\hat{B} < \hat{\Gamma}$, επίσης άτοπο.