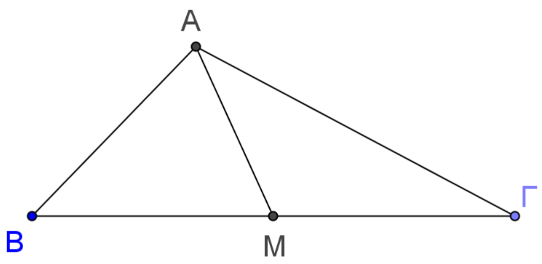
2[ο] φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ

Α1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι

$\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;



Λύση:

- Από την $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, προκύπτει ότι:

- στο τρίγωνο ΑΜΒ

έχουμε ΑΜ<ΒΜ οπότε (*§3.11 Θεώρημα)* παίρνουμε $\hat{B} < \hat{A}_1$ **(1)**

- στο τρίγωνο ΑΜΓ

έχουμε ΑΜ<ΜΓ οπότε (*§3.11 Θεώρημα)* παίρνουμε $\hat{\Gamma} < \hat{A}_2$ **(2)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει

$\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$.

- Αν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ τότε:

από το ισοσκελές ΑΜΒ έχουμε $\hat{B} = \hat{A}_1$ και από το ισοσκελές ΑΜΓ έχουμε $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

- Αν $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ προκύπτει ότι $\hat{A} < \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

Ε5. Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ<ΑΒ .

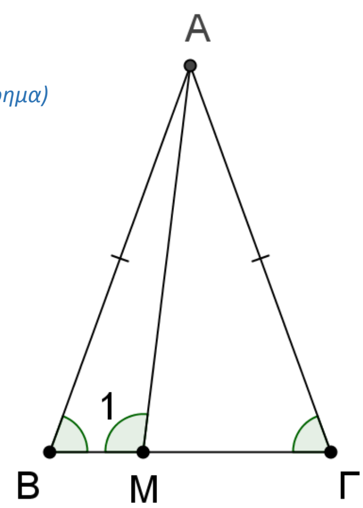
Λύση:

Η γωνία $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ επομένως $\hat{M}_1 > \hat{\Gamma}$ **(1)** *(§ 3.10 Θεώρημα)*

Ομως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ **(2).**

Απο **(1)** και **(2)** παίρνουμε $\hat{M}_1 > \hat{B}$ οπότε από το τρίγωνο ΑΒΜ προκύπτει

ότι ΑΒ>ΑΜ. *(§ 3.11 Θεώρημα)*



§ 3.11 ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

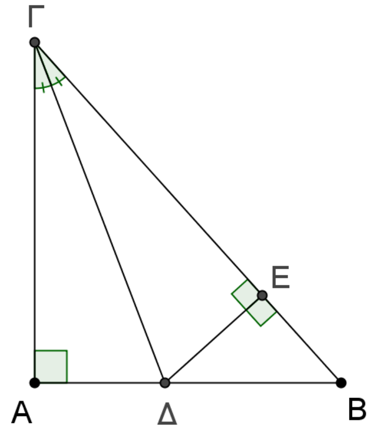
i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

Απόδειξη:

Εχουμε δείξει (*Πόρισμα I § 3.10*) ότι ένα τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.Αρα αφού οι άλλες γωνίες του τριγώνου είναι οξείες δηλαδή μικρότερες, οι απέναντι πλευρές τους θα είναι μικρότερες από την απέναντι πλευρά της ορθής ή αμβλείας.

Πιο αλγεβρικά: Εστω $\hat{B} \geq 90°$.Τότε $\hat{A} < \hat{B}$ οπότε α<β και $\hat{\Gamma} < \hat{B}$ οπότε γ<β.

Ε6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°), η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ<ΔΒ



Λύση:

Φέρνω ΔΕ$\perp$ΒΓ.Επειδή ΓΔ διχοτόμος θα είναι ΑΔ=ΔΕ. **(1)**

Ομως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΒ προκύπτει ΔΕ<ΔΒ **(2)**

Από **(1)**, **(2)** παίρνουμε ΑΔ<ΔΒ.

(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

Απόδειξη:

Εστω $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Αν ήταν $\beta > \gamma$ θα είχαμε *(Θεώρημα § 3.11)* $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ άτοπο.

Επίσης αν ήταν $\beta < \gamma$ θα είχαμε *(Θεώρημα § 3.11)* $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ άτοπο.

Αρα β=γ.

ΣΧΟΛΙΟ
*Το διπλανό πόρισμα **(ii)** είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής:*
Ενα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

Σημείωση: Για την μέθοδο «απαγωγή σε άτοπο» (reductio ad absurdum λατινιστί) δείτε και το βιβλίο άλγεβρας Μέθοδοι απόδειξης.

(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη:

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε από Πόρισμα (ii) β=γ.

$\hat{A} = \hat{B}$ οπότε από Πόρισμα (ii) α=β.

Τελικά α=β=γ.