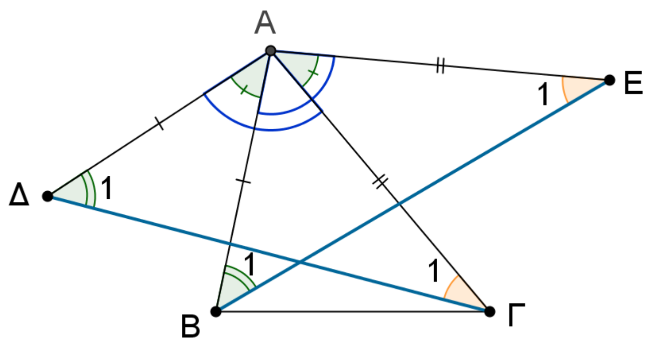
Ε1.Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ, ώστε $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:



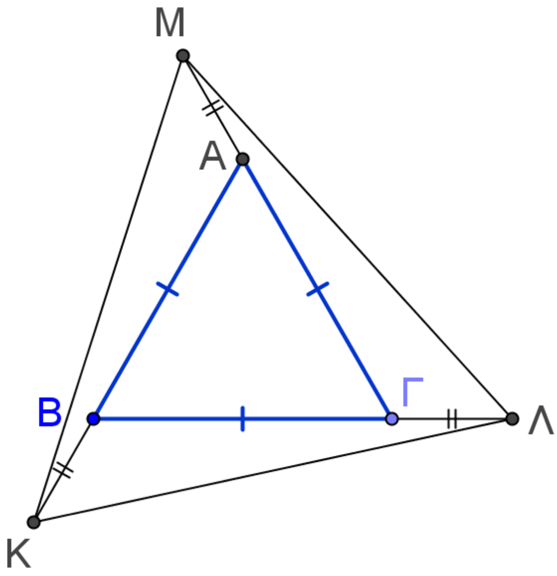
$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} \text{ από τα δεδομένα} \\ &\mathrm{B\hat{A}E} = \hat{\mathrm{A}} + \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{A}} + \mathrm{B\hat{A}\Delta} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma \\ &\mathrm{AE} = \mathrm{A}\Gamma \text{ από τα δεδομένα} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{BE} = \Gamma\Delta \\ &\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 \\ &\hat{\Gamma}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \end{aligned}\right\}$$

Ε2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Λύση:



- Αφού το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ
- Επίσης από τα δεδομένα

ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ

- Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες αυτές έχουμε:

ΑΒ+ ΒΚ =ΒΓ+ ΓΛ =ΑΓ+ ΑΜ ή

ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ

- Γνωρίζουμε ότι οι γωνίες ισοπλεύρου είναι ίσες (Πόρισμα ΙΙ)

(*Δεν γνωρίζουμε ακόμα ότι οι γωνίες ισοπλεύρου είναι 60 μοίρες .*Αρα και οι παραπληρωματικές τους θα είναι ίσες.

Για όποιον θέλει πιο αλγεβρικό χειρισμό:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow -\hat{A} = -\hat{B} = -\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 180° - \hat{A} = 180° - \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow M\hat{A}K = K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M$$

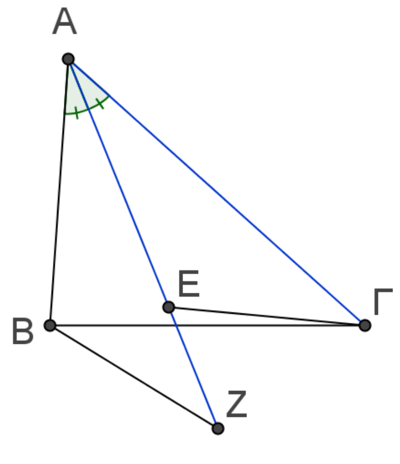
► Τα τρίγωνα ΜΑΚ, ΚΒΛ, ΓΛΜ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AM = BK = \Gamma\Lambda \\ M\hat{A}K = K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M \\ AK = B\Lambda = \Gamma M \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Ε3.Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

Λύση:

Ε4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της Α στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΓΕ = ΑΖΒ.



Λύση:

Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΖΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AE \;=\; AB \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AZ \;=\; A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

Α1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα ΚΔ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Λύση:

- Τα τρίγωνα ΔΚΕ και ΑΚΒ είναι ίσα αφού:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K}\Delta = \mathrm{AK} \text{ από τα δεδομένα} \\ \Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} \text{ ως κατακορυφήν} \\ \mathrm{KE} = \mathrm{BK} \text{ από τα δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ΠΓΠ είναι ίσα, οπότε } \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} \quad \textbf{(1)}$$

- Τα τρίγωνα ΔΚΖ και ΑΚΓ είναι ίσα αφού:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K}\Delta = \mathrm{AK} \text{ από τα δεδομένα} \\ \Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\Gamma \text{ ως κατακορυφήν} \\ \mathrm{KZ} = \Gamma\mathrm{K} \text{ από τα δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ΠΓΠ είναι ίσα, οπότε } \mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} \quad \textbf{(2)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

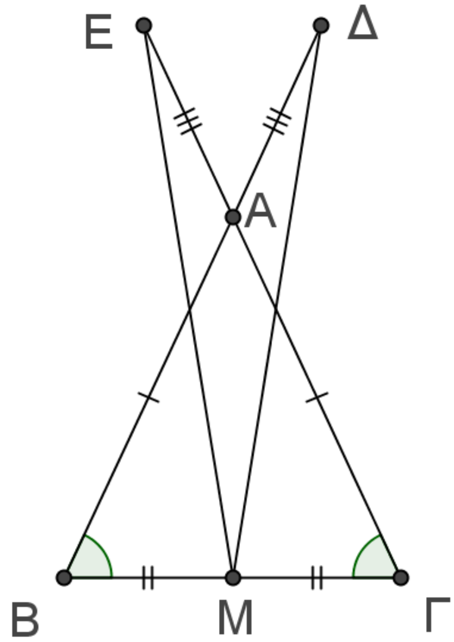
$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{K} + \mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} + \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} \Leftrightarrow \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$$

Σημείωση: Από την πρώτη ισότητα τριγώνων προκύπτει επιπλέον ότι ΑΒ=ΔΕ και από την δεύτερη ότι ΑΓ=ΔΖ οπότε από το ΠΓΠ προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι ίσα.Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς Κ.Αρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δύο τρίγωνα συμμετρικά ως προς σημείο είναι ίσα.

Για πιο πλήρη απόδειξη δες § 3.8 Εφαρμογή και άσκηση Ε2.

Α2.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση:



Αρκεί να δείξουμε ότι ΜΔ=ΜΕ.

Ετσι βρίσκω δύο τρίγωνα που να έχουν ως πλευρές τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ και θα δείξω ότι είναι ίσα.

Θεωρώ τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ.

Επειδή το ΑΒΓ ισοσκελές θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$ (Πόρισμα Ι)

ΒΔ=ΑΒ+ΑΔ=ΑΓ+ΕΑ=ΓΕ

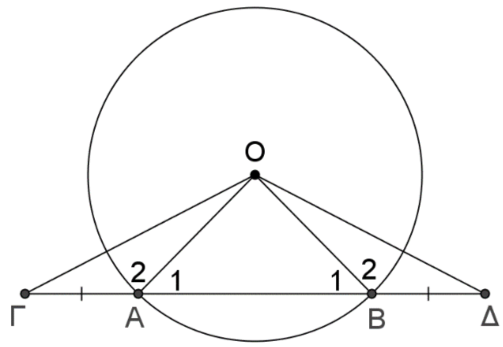
Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{MB} &= \mathrm{M\Gamma} \\ \hat{\mathrm{B}} &= \hat{\Gamma} \\ \mathrm{B\Delta} &= \Gamma\mathrm{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Α3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΟΓΑ = ΟΔΒ.

Λύση:

Επειδή ΟΑ=ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}_1$ (Πόρισμα Ι) άρα θα είναι ίσες και οι παραπληρωματικές τους: $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\mathrm{B}}_2$



Τα τρίγωνα ΟΓΑ, και ΟΔΒ έχουν:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{OA} &= \mathrm{OB} \\ \hat{\mathrm{A}}_2 &= \hat{\mathrm{B}}_2 \\ \mathrm{A\Gamma} &= \mathrm{B\Delta} \text{ από δεδομένα} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$