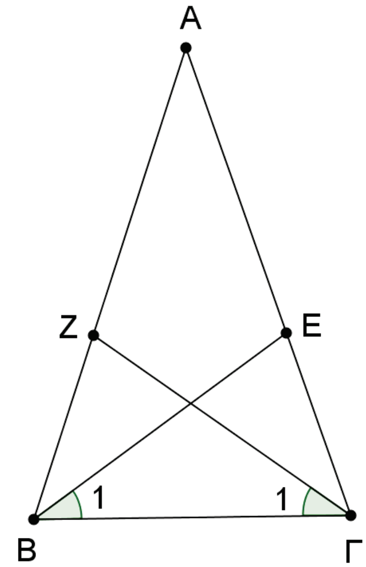
§ 3.3-3.4 ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (version 12-8-2016)

Α1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.



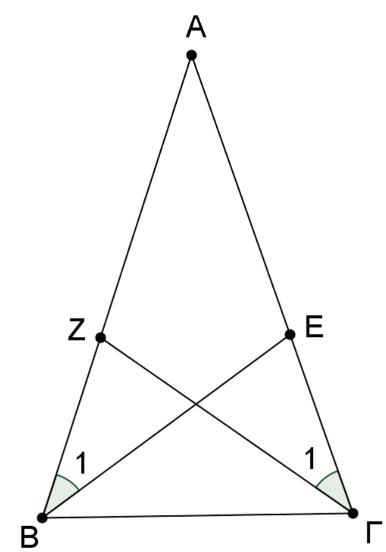
Λύση:

Γνωρίζουμε από Πόρισμα Ι ότι *«Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες».* Επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΕΒΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ B\Gamma \text{ κοινή} \\ \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \text{ ως μισά ίσων γωνιών} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma\Pi\Gamma \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και ΒΕ=ΖΓ.}$$

$2^{ος}$ τρόπος (Λύση σχολικού)

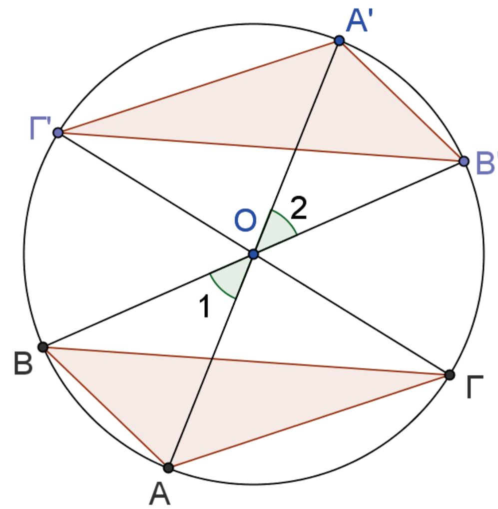


Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΖΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ κοινή} \\ AB = A\Gamma \\ \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \text{ ως μισά ίσων γωνιών} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma\Pi\Gamma \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και ΒΕ=ΖΓ.}$$

Α2. Αν AA', BB' $\Gamma\Gamma'$ είναι τρείς διάμετροι κύκλου να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Λύση:



● Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} OA = O'A' \text{ ως ακτίνες του κύκλου} \\ OB = O'B' \text{ ως ακτίνες του κύκλου} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ ως κατακορυφήν} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi \text{ είναι ίσα, άρα θα}$$

είναι και ΑΒ=Α΄Β΄ **(1)**

● Ομοια από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΓ και ΟΑ΄Γ΄ βρίσκουμε ότι ΑΓ=Α΄Γ΄ **(2)**

● Ομοια από την ισότητα των τριγώνων ΟΒΓ και ΟΒ΄Γ΄ προκύπτει ότι ΒΓ=Β΄Γ΄.**(3)**

● Από τις **(1), (2),** και **(3)** και το κριτήριο ΠΠΠ συμπεραίνουμε πως τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Σημειώσεις

1. Θα μπορούσε κάποιος να πεί πως αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν) θα είναι και $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ (§2.18 Θεώρημα Ι) οπότε και ΑΒ=Α΄Β΄ (§3.2 Πόρισμα ΙV).*Μάλλον προτιμώ την λύση του σχολικού βασίζεται σε πιο πρωτογενή στοιχεία.*

2. Το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ είναι συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς το σημείο Ο.Θα δείξουμε στην άσκηση Ε2 της §3.8 ότι αυτά είναι ίσα.Ετσι αυτή η άσκηση είναι μια ειδική περίπτωση του γενικότερου αυτού αποτελέσματος.

Αθανασίου Δημήτριος asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Α3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΓΔ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

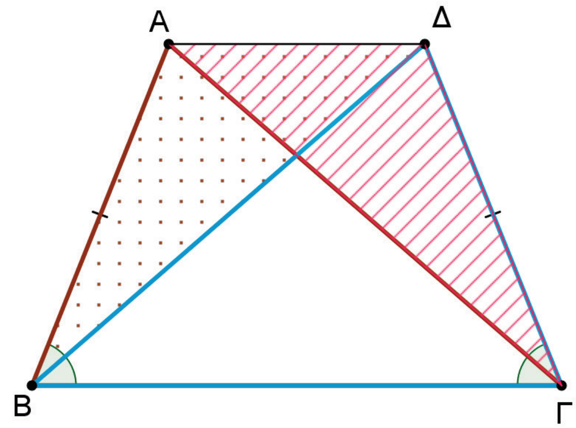
i) Να αποδείξετε ότι $\hat{A}=\hat{\Delta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ΑΔ // ΒΓ

Λύση:

Σκέψη: Σκέφτομαι να δημιουργήσω δύο τρίγωνα που να έχουν γωνίες τις $\hat{A}=\hat{\Delta}$ *και να τα συγκρίνω*

Φέρνω λοιπόν τις διαγωνίους ΔΒ και ΑΓ.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB=\Gamma\Delta \text{ δεδομένα} \\ \hat{B}=\hat{\Gamma} \text{ δεδομένα} \\ B\Gamma \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και}$$

ΑΓ=ΒΔ.

- Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΑ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta \text{ κοινή} \\ AB=\Gamma\Delta \\ B\Delta=A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Pi\Pi \text{ είναι ίσα, άρα θα είναι και } \hat{A}=\hat{\Delta}.$$