§3.3- 3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ (version 11-8-2016)

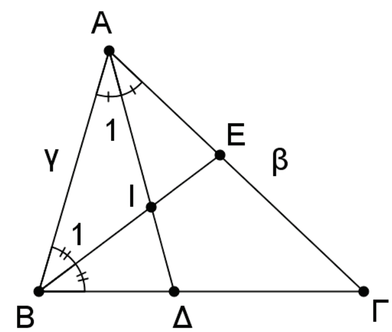
Ε1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ και $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}'$.Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνουν ΑΒΓ και $\mathrm{I'}$ το σημείο τομής των διχοτόμων $\mathrm{A'\Delta'}$ και $\mathrm{B'E'}$ του $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ να αποδείξετε ότι:

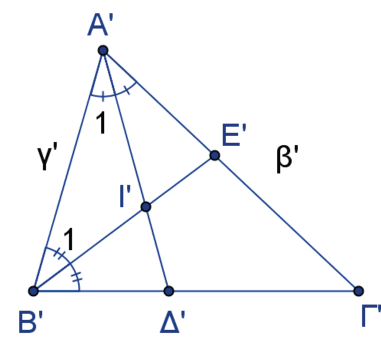
i) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{A'\Delta'}$ και $\mathrm{BE}=\mathrm{B'E'}$.

ii) $\mathrm{AI}=\mathrm{A'I'}$ και $\mathrm{BI}=\mathrm{B'I'}$.

iii) $\mathrm{IE}=\mathrm{I'E'}$

Λύση:





***Σκέψη**: Αρχικά σκεφτόμαστε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και* $\mathrm{A'B'\Delta'}$*, όμως δεν έχουμε επαρκή στοιχεία.Γνωρίζουμε μόνο ότι* $\gamma=\gamma'$ *καθώς και* $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}'_1$ *(ως μισά ίσων γωνιών).Προκειμένου να πάρουμε το στοιχείο* $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'$ *που μας λείπει και κυττώντας και τι μας δίνεται οδηγούμαστε στην σκέψη να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.*

● Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\beta'\\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}\\ \gamma=\gamma'\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'$$

● Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}'_1\\ \gamma=\gamma'\\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ΓΠΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \mathrm{A\Delta}=\mathrm{A'\Delta'}$$

● Τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α΄Β΄Ε΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}'\\ \gamma=\gamma'\\ \hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}'_1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ΓΠΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \mathrm{BE}=\mathrm{B'E'}$$

● Τα τρίγωνα ΑΒΙ και Α΄Β΄Ι΄ έχουν

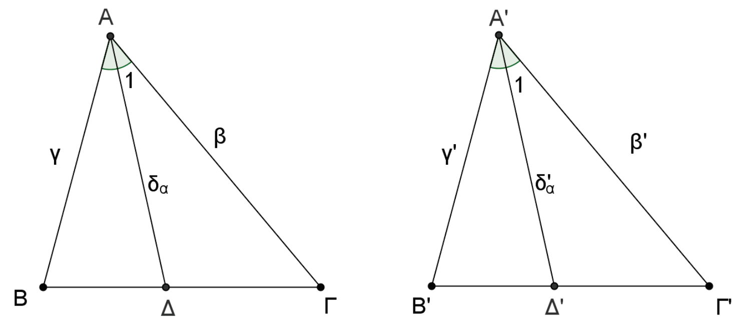
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}'_1\\ \gamma=\gamma'\\ \hat{B}_1=\hat{B}'_1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ΠΓΠ}$$ είναι ίσα οπότε θα έχουν και $AI=A'I'$ καθώς και $BI=B'I'$.

● $IE=BE-BI=B'E'-B'I'=I'E'$

E2. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta'_\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.



Λύση:

- Τα τρίγωνα ΑΔΓ και Α΄Δ΄Γ΄ έχουν:

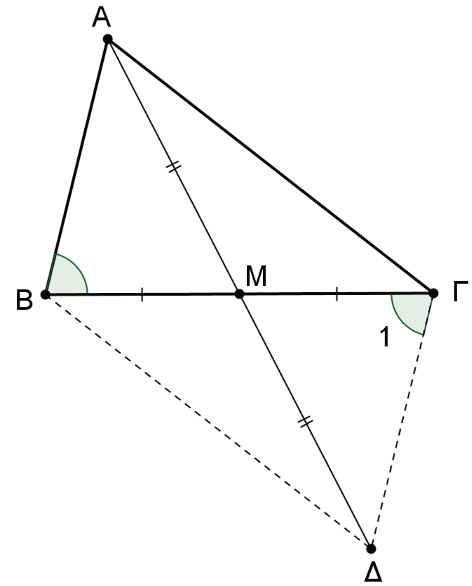
$$\left.\begin{array}{l} \delta_\alpha = \delta'_\alpha \\ \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ \beta = \beta' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'.$$

- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \beta = \beta' \\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΓΠΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \alpha = \alpha' \text{ καθώς και } \gamma = \gamma'$$

Ε3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Λύση:



● Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΓΜΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} \\ \hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2 \ \text{(κατακορυφήν)} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και}$$

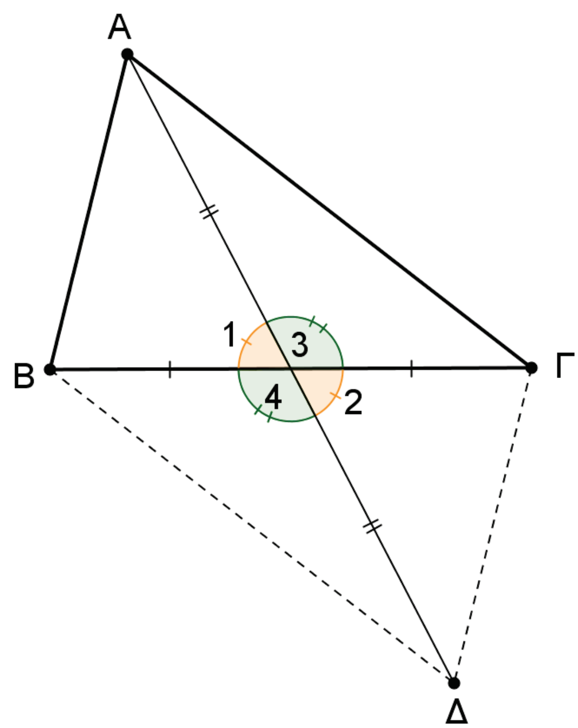
ΑΒ=ΓΔ καθώς και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}_1$

● Πλέον τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AB} = \Gamma\Delta \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}_1 \\ \mathrm{B\Gamma} \ \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

__Παρατήρηση__: Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε κέρδος αν μετά μια σύγκριση τριγώνων αταγράφουμε όχι μόνο την ισότητα που χρειαζόμαστε άμεσα όλες τις ισότητες που μας δίνει αφού μπορεί να μας χρειαστούν πιο κάτω.

Λύση σχολικού (3 συγκρίσεις τριγώνων)



● Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΓΜΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} \\ \hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2 \ \text{(κατακορυφήν)} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν}$$

και ΑΒ=ΓΔ.

● Παρόμοια τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΔΜΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} \\ \hat{\mathrm{M}}_3 = \hat{\mathrm{M}}_4 \ \text{(κατακορυφήν)} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν}$$

και ΑΓ=ΒΔ.

● Πλέον τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΓ κοινή} \\ \text{ΑΒ} = \text{ΓΔ} \\ \text{ΑΜ} = \text{ΜΔ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΠΠ είναι ίσα.}$$

<u>Σημείωση:</u> Το ΔΓΒ είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς Μ και αποδεικνύεται γενικά (§3.9 άσκηση Ε2) ότι τρίγωνα συμμετρικά ως προς σημείο είναι ίσα.Αρα αυτή η άσκηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ειδική περίπτωση του γενικότερου αυτού αποτελέσματος