3.3-3.4 1^{o} φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ (version 9-8-2016)

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ) (Μοναδικότητα κατασκευής)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

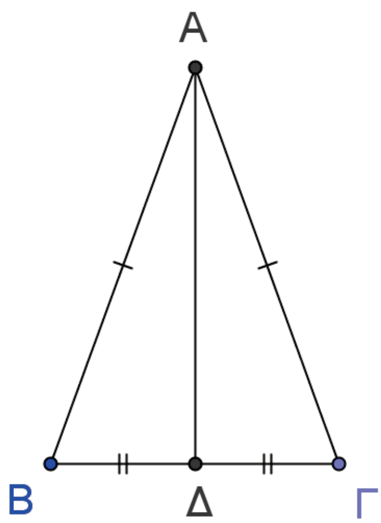
Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ) (Μοναδικότητα κατασκευής)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη



Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ . Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΔ.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A\Gamma \\ B\Delta = \Delta\Gamma \\ A\Delta \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΠΠΠ είναι ίσα.Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα

στοιχεία τους ίσα δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ δηλαδή η ΑΔ είναι και διχοτόμος

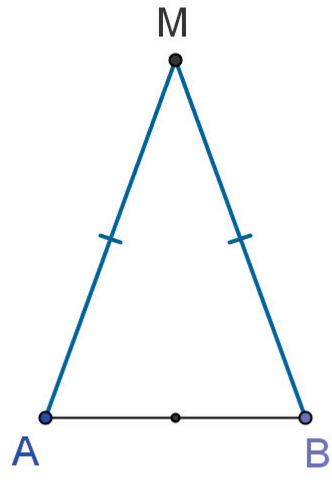
και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$

προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη *(χρησιμοποιείστε το προηγούμενο ΠΟΡΙΣΜΑ Ι)*



Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι:

η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου

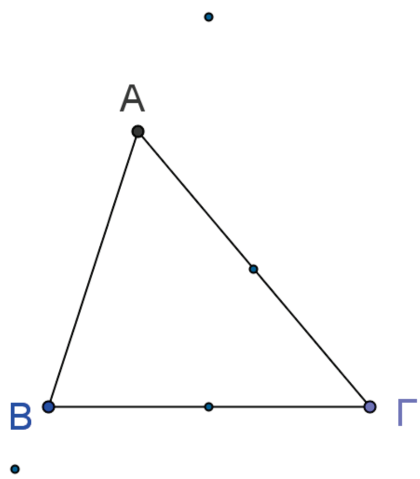
Απάντηση:

Αφού το ζητούμενο σημείο ισαπέχει από τα Α, Β, Γ

θα ισαπέχει από τα Α και Β οπότε θα βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ΑΒ, και

Θα ισαπέχει Α και Γ οπότε θα βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ΑΓ,

Αρα θα είναι το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων.



ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

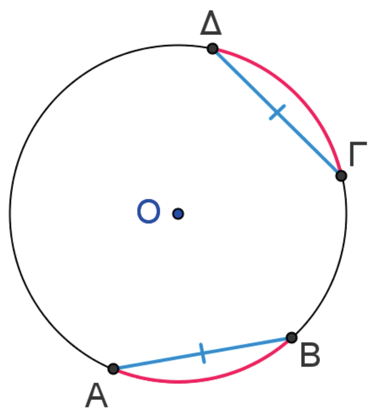
Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} OA = O\Gamma(=\rho) \\ OB = O\Delta(=\rho) \\ AB = \Gamma\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.}$$

Επομένως, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ Α



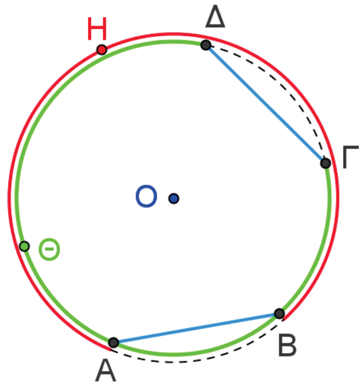
ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη:

Αφού ΑΒ=ΓΔ θα είναι σύμφωνα με το ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow 360° - \overset{\frown}{AB} = 360° - \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overset{\frown}{AHB} = \overset{\frown}{\Gamma H\Delta}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.