Σ1. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α'Μ' και η αντίστοιχη διχοτόμος Β'Δ' του Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ'.

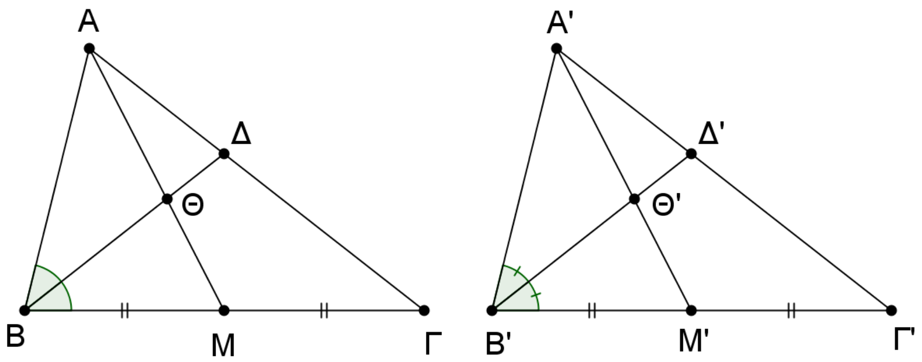
Να αποδείξετε ότι:

i) ΒΔ = Β'Δ',

ii) ΒΑΜ = Β'Α'Μ',

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα,

iv) ΑΘ = ΑΘ' και ΘΔ = Θ'Δ'.



Λύση:

● Αφού τα ΑΒΓ και Α'Β΄'Γ' είναι ίσα θα έχουν:

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ A\Gamma &= A'\Gamma' \\ B\Gamma &= B'\Gamma' \end{aligned}\right\} \text{ καθώς και } \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}' \end{aligned}$$

i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' έχουν

$$\left.\begin{aligned} &\hat{A} = \hat{A}' \\ &AB = A'B' \\ &\hat{B}_1 = \hat{B}_1' \text{ ως μισά ίσων γωνιών} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΓΠΓ είναι ίσα επομένως θα έχουν και ΒΔ = Β'Δ'}$$

ii) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ' έχουν

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ AM &= A'M' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα. Επομένως θα έχουν και } \left.\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_1' \\ AM &= A'M' \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_1' \end{aligned}\right\}$$

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_1' \text{ ως μισά ίσων γωνιών}\\ \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}\\ \hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_1' \text{ (από ii)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ ΓΠΓ είναι ίσα.

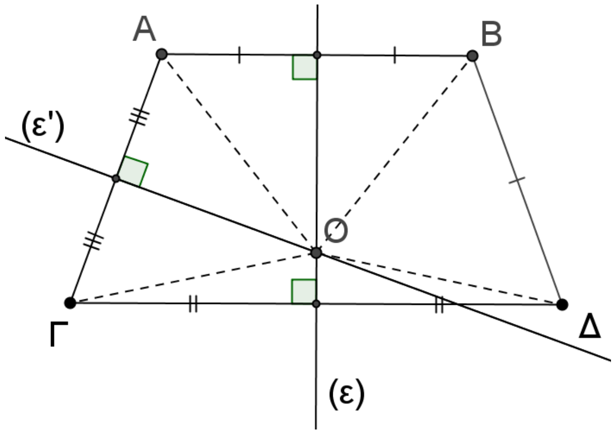
iv) Από την προγούμενη ισότητα προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{A\Theta}=\mathrm{A'\Theta'}\\ \mathrm{B\Theta}=\mathrm{B'\Theta'}\\ \hat{\Theta}_1=\hat{\Theta}_1'\end{array}\right\}$$

Αφού έχουμε δείξει πως ΒΔ = Β'Δ' (ερώτημα i) και $\mathrm{A\Theta}=\mathrm{A'\Theta'}$, θα είναι και $\Theta\Delta=\Theta'\Delta'$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Σ2. Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.

Λύση:



Εστω ε′ η μεσοκάθετος του ΑΓ και Ο το σημείο τομής των ε και ε′.Επειδή ε μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι ΟΑ=ΟΒ **(1)**

Ομοια Επειδή ε μεσοκάθετος του ΓΔ θα είναι ΟΓ=ΟΔ **(2)**.

Αλλά το Ο ανήκει και στην μεσοκάθετο του ΑΓ.

Αρα ΟΑ=ΟΓ **(3)**.

Από τις **(1), (2)** και **(3)** προκύπτει ότι ΟΒ=ΟΔ, δηλαδή το Ο ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ.

Παρατηρήσεις:

i) Τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλα αφού όπως θα μάθουμε αργότερα δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες μεταξύ τους.Για κάποιον που δεν το γνωρίζει ίσως το σχήμα παρουσιάζει δυσκολίες.

ii) Μπορούμε να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα:

Στο ισοσκελές ΟΑΒ η διάμεσος είναι και ύψος διχοτόμος οπότε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Στο ισοσκελές ΟΓΔ η διάμεσος είναι και ύψος διχοτόμος οπότε $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

$$\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = 180° - \hat{O}_1 - \hat{O}_3 = 180° - \hat{O}_2 - \hat{O}_4 = \mathrm{B\hat{O}\Delta}$$

Επιπλέον ΟΑ=ΟΒ και ΟΓ=ΟΔ.Αρα ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα είναι και ΑΓ=ΒΔ

Αρα το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

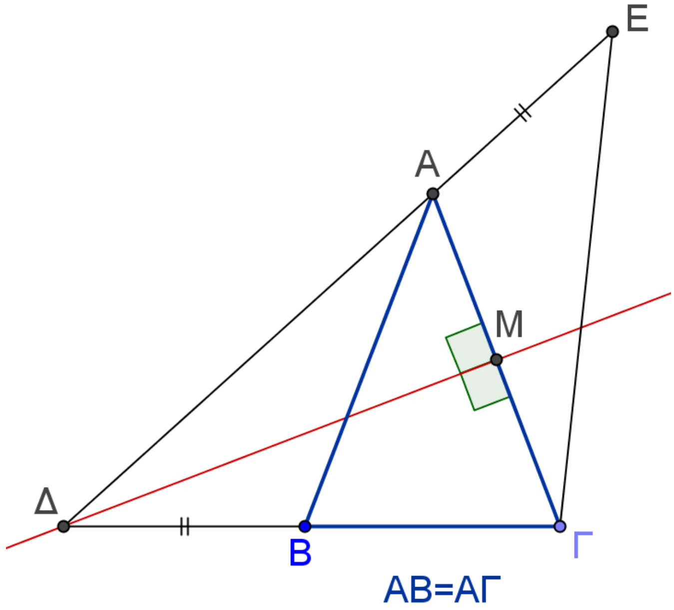
iii) Αφού ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ υπάρχει ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα διέρχεται από τα Α, Β, Γ, Δ. (περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ).

Σ3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

Λύση:



i) Αφού το Δ σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΓ είναι ΔΑ=ΔΓ οπότε το ΔΑΓ ισοσκελές.

ii) Αρκεί να δείξω ότι ΓΔ=ΓΕ.Όμως από το ερώτημα i) είναι ΓΔ=ΔΑ.Επομένως αρκεί να δείξουμε πως ΓΕ=ΔΑ. Γι αυτό θα προσπαθήσω να δείξω ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΔΑ είναι ίσα.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AE} = \Delta\mathrm{B}\ \text{δεδομένα} \\ \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB}\ \text{δεδομένα} \end{array}\right\}$$

Μου λείπει η ισότητα των περιεχόμενων στις πλευρές αυτές γωνίες $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_1$.

Στο **i)** δείξαμε πως ΔΑΓ ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες: $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$.

Επιπλέον από το ισοσκελές ΑΒΓ: $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}$.

Επομένως $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\mathrm{B}}$.Πλέον είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_1$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Συνεπώς από ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΔΑ είναι ίσα, άρα θα έχουν και ΓΕ=ΔΑ.

Τελικά ΓΕ=ΓΔ δηλαδή ΓΔΕ ισοσκελές.