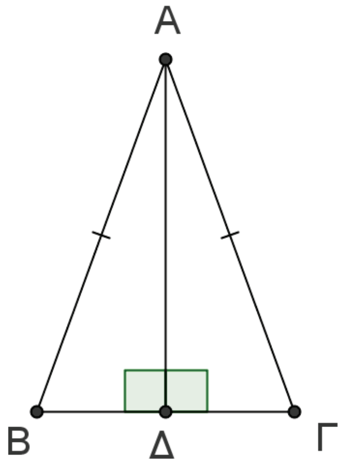
3.5- 3.6 2ο Φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ (version 13-8-2016)

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.



Απόδειξη

Αφού το ΑΔ ύψος είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΓ έχουν:

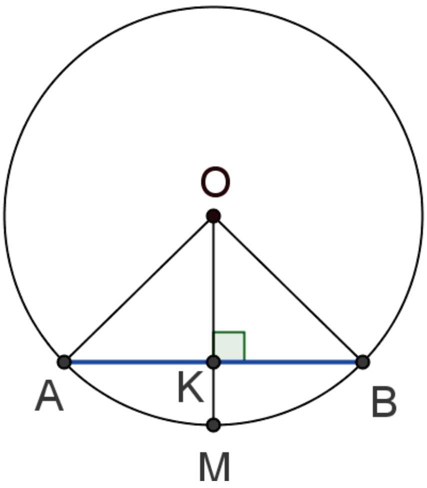
$$\left.\begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90° \\ \text{ΑΔ κοινή} \\ \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Θεώρημα ΙΙ είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα}$$

αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα και ειδικά ΒΔ=ΔΓ οπότε Δ μέσο του ΒΓ και συνεπώς ΑΔ διάμεσος.

Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, οπότε το ΑΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.



Απόδειξη

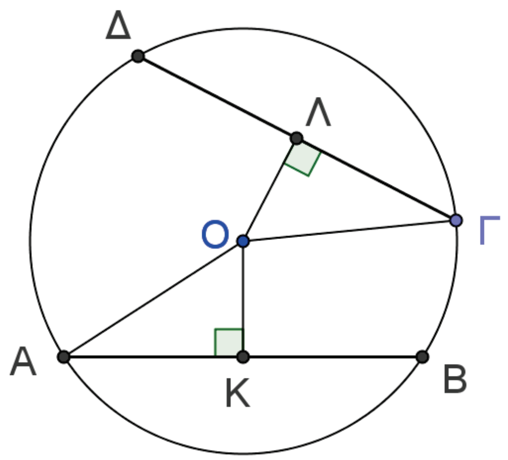
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ . Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ= ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Αφού $\hat{O}1 = \hat{O}2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$. *(§ 2.18 Θεώρημα Ι)*

Θεώρημα ΙΙΙ

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη:



'Εστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα.Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ).

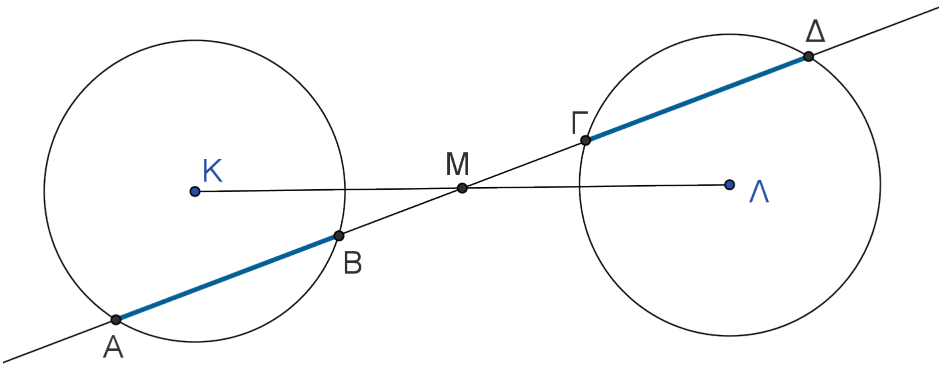
Επομένως *(Θεώρημα ΙΙ)* είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως *(Θεώρημα ΙΙ)* είναι ίσα, οπότε

$\mathrm{AK} = \Lambda\Gamma$ ή $\frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ή ΑΒ = ΓΔ.

Εφαρμογή 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα.Να αποδειχθεί ότι ΑΒ=ΓΔ.



Απόδειξη *(σχολικού)*

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων για να είναι ίσα, αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα.Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$ και έχουν ΚΜ=ΜΛ γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν.

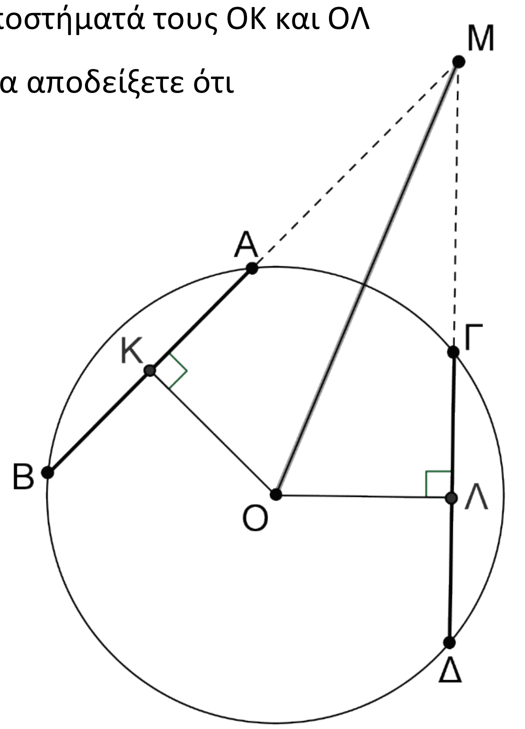
Αρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ=ΛΖ.

<u>Σημείωση</u>: Κάποιος εδώ που έχει μείνει στην ισότητα τριγώνων μπορεί να φέρει τις ακτίνες ΚΑ, ΚΒ, ΛΓ και ΓΔ και να συγκρίνει τα τρίγωνα ΚΑΒ Και ΛΓΔ.Ομως δεν φαίνεται να οδηγεί κάπου μια τέτοια προσέγγιση.

Α5. Δίνεται κύκλος (O,R), οι ίσες χορδές του ΑΒ και ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα.Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι

i) Τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα.

ii) ΜΑ=ΜΓ και ΜΒ=ΜΔ.



Λύση:

i) Αφού οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες από Θεώρημα ΙΙΙ και τα αποστήματα θα είναι ίσα δηλαδή ΟΚ=ΟΛ.

Πλέον τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΟΜ και ΛΟΜ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ \\ KO=O\Lambda \\ OM \text{ κοινή}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ Άρα *(Θεώρημα ΙΙ)* είναι ίσα.

ii) Από την ισότητα των ΜΟΚ και ΜΟΛ που δείξαμε στο i) παίρνουμε ότι ΚΜ=ΜΛ.

Από Πόρισμα ΙΙ τα Κ και Λ είναι αντίστοιχα μέσα των ΑΒ και ΓΔ οπότε ΚΑ=ΛΓ και ΚΒ=ΛΔ ως μισά ίσων τμημάτων.

ΜΑ=ΜΚ-ΚΑ=ΜΛ-ΓΛ=ΜΓ

ΜΒ=ΜΚ+ΚΒ=ΜΛ+ΛΔ