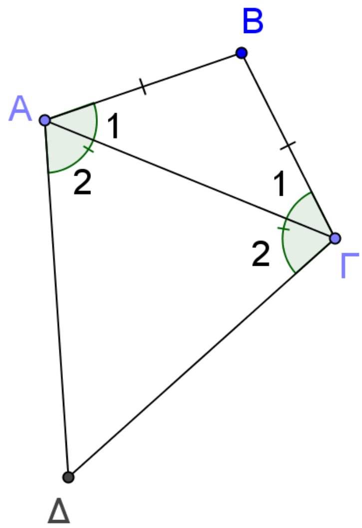
$3^{α}$ φυλλάδιο Ασκήσεις στο Πόρισμα ii και στο σχόλιο ΛΥΣΕΙΣ

Ε2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και Α= Γ, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ.

Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

Λύση:



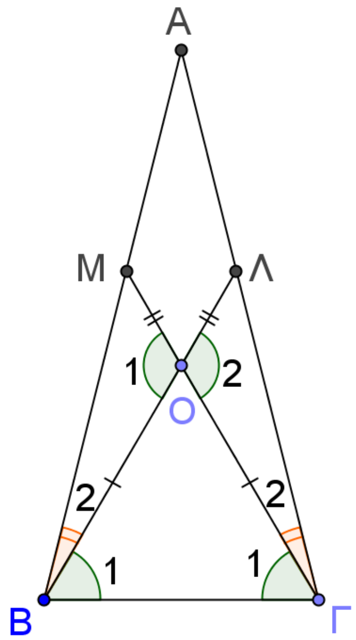
Αφού ΒΑ=ΒΓ **(1)** θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$

Επειδή όμως από τα δεδομένα, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ θα είναι και $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$, οπότε από Πόρισμα ii) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΑ=ΔΓ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** συμπεραίνω ότι τα σημεία και Β, Δ ανήκουν στην μεσοκάθετο του ΑΓ επομένως η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ.

Ε7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση:



Αφού ΒΟ=ΟΓ θα είναι: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(1)** *(προσκείμενες γωνίες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου)*

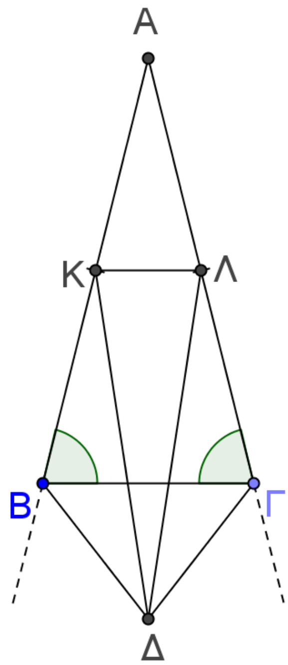
Τα τρίγωνα ΟΒΚ και ΟΒΛ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} OB = O\Gamma \ \text{δεδομένα} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{ως κατακορυφήν} \\ OK = O\Lambda \ \text{δεδομένα} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Π-Γ-Π είναι ίσα άρα θα έχουν

$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** παίρνουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε *(πόρισμα ii)* το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Ε8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του Β και Γ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.



Λύση:

Αφού ΑΒ=ΑΓ και τα μισά τους θα είναι ίσα, οπότε ΒΚ=ΛΓ

Αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ **(1)** *(προσκείμενες γωνίες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου)* άρα και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ **(***παραπληρωματικές ίσων γωνιών),* οπότε και τα μισά τους θα είναι ίσα δηλαδή $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$ **(2)**.

Από το πόρισμα ii) παίρνουμε ότι ΒΔ=ΔΓ.

Αθροίζοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε: $K\hat{B}\Delta=\Lambda\hat{\Gamma}\Delta$.

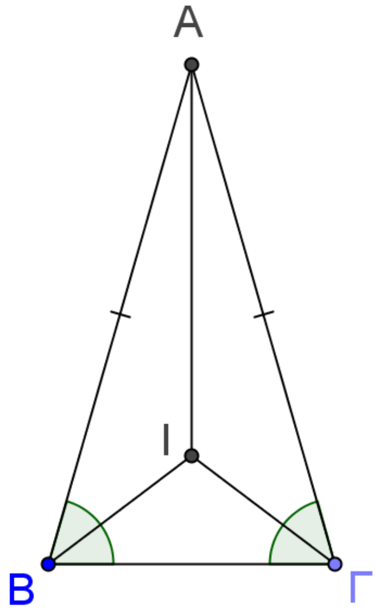
Τα τρίγωνα ΚΒΔ και ΛΓΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} BK=\Gamma\Lambda \\ K\hat{B}\Delta=\Lambda\hat{\Gamma}\Delta \\ \Delta B=\Delta\Gamma \end{array}\right\}\Rightarrow$$ (Π-Γ-Π) είναι ίσα οπότε ΔΚ=ΔΛ, δηλαδή το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Ε9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β, Γ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της Α.



Λύση:

i) Αφού ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες δηλαδή $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ οπότε και τα μισά τους θα είναι ίσα δηλαδή $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Το τρίγωνο ΒΓΙ έχει δύο γωνίες ίσες άρα από Πόρισμα ii είναι ισοσκελές δηλαδή ΒΙ=ΙΓ.

ii) Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της Β θα ισαπέχει από τις ΑΒ και ΒΓ

Ως σημείο της διχοτόμου της Γ θα ισαπέχει απο τις ΑΓ και ΒΓ.

Επειδή ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ θα ειναι σημείο της διχοτόμου της Α.

Αρα η ΑΙ διχοτόμος της Α.

β' τρόπος: Τα τρίγωνα ΑΒΙ και ΑΓΙ είναι ίσα γιατί έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΒΙ=ΙΓ, ΑΙ κοινή, οπότε Π-Π-Π είναι ίσα άρα $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ δηλαδή ΑΔ διχοτόμος της $\hat{A}$.