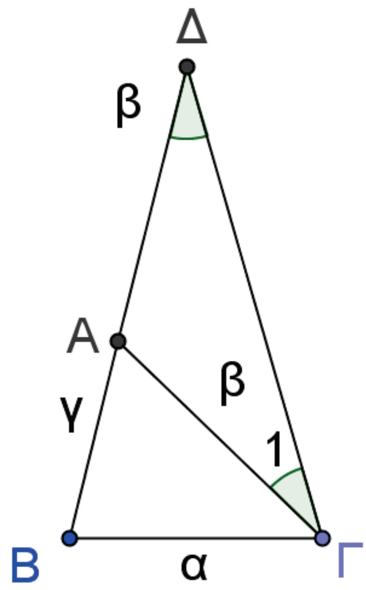
§ 3.12 **Θεώρημα**

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη:



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι α < β + γ.

Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ.

Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ **(1).**

Η ΓΑ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** παίρνουμε $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το θεώρημα της §3.11 προκύπτει ότι ΒΓ < ΒΔ

$$B\Gamma < B\Delta \Leftrightarrow B\Gamma < BA + A\Delta \Leftrightarrow \alpha < \gamma + \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta + \gamma$$

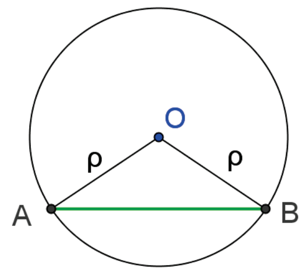
● Όμοια συμπεραίνουμε ότι β < γ + α και γ < α + β.

Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι α > β - γ,αν β ≥ γ **ή** α > γ - β, αν γ ≥ β, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \qquad \beta \geq \gamma$$

Πόρισμα

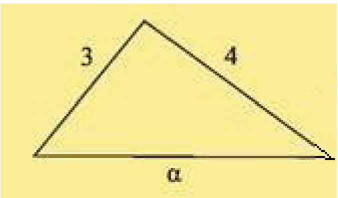
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.



Κ2. Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:

α. α = 7 **β.** α=1 **γ.** 1<α<7 **δ.**α>7 **ε.** 0<α<1

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Απάντηση:

Από την τριγωνική ανισότητα

$$4 - 3 < \alpha < 4 + 3 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 7$$

Κ3. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\dfrac{\gamma}{3}$ και $\beta=\dfrac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Από την $\alpha=\dfrac{\gamma}{3}$ συμπεραίνω ότι α<γ και από την $\beta=\dfrac{3\gamma}{5}$ προκύπτει ότι β<γ.

Αρα η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου οπότε πρέπει: $\gamma<\alpha+\beta$.

$$\alpha+\beta=\frac{\gamma}{3}+\frac{3\gamma}{5}=\frac{5\gamma}{15}+\frac{9\gamma}{15}=\frac{14\gamma}{15}<\gamma$$

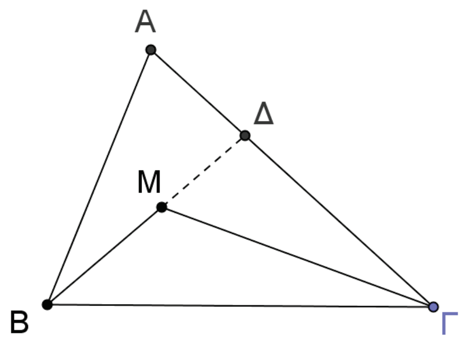
Αρα δεν υπάρχει τρίγωνο με δοσμένες πλευρές πλευρές.

Εφαρμογή 1η ii)

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

$$\mathrm{BM}+\mathrm{M\Gamma}<\mathrm{BA}+\mathrm{A\Gamma}$$

Λύση:



Εστω Δ το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ.

Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

ΒΔ<ΒΑ+ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΒΜ+ΜΔ<ΒΑ+ΑΔ **(1)**

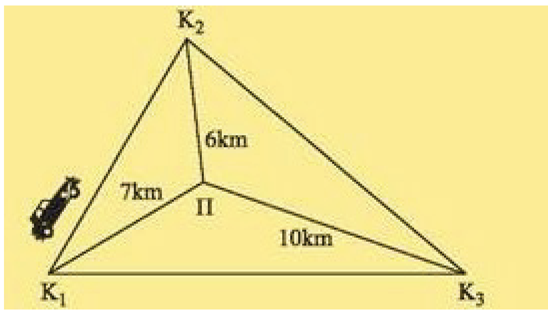
Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΔΜΓ έχουμε:

ΜΓ<ΜΔ+ΔΓ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε:

$$\mathrm{BM}+\cancel{\mathrm{M\Delta}}+\mathrm{M\Gamma}<\mathrm{BA}+\mathrm{A\Delta}+\cancel{\mathrm{M\Delta}}+\mathrm{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{BM}+\mathrm{M\Gamma}<\mathrm{BA}+\mathrm{A\Delta}+\mathrm{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{BM}+\mathrm{M\Gamma}<\mathrm{BA}+\mathrm{A\Gamma}$$

Ε10. Οι κωμοπόλεις Κ1, Κ2, Κ3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη Κ1 και ακολουθώντας τη διαδρομή Κ1Κ2Κ3Κ1 επιστρέφει στην Κ1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Λύση:

Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΠK_1K_2, ΠK_1K_3, ΠK_2K_3 παίρνουμε αντίστοιχα:

$$K_1K_2<K_1\Pi+\Pi K_2\Leftrightarrow K_1K_2<7+6\Leftrightarrow K_1K_2<13$$

$$K_2K_3<K_2\Pi+\Pi K_3\Leftrightarrow K_2K_3<6+10\Leftrightarrow K_2K_3<16$$

$$K_1K_3<K_1\Pi+\Pi K_3\Leftrightarrow K_1K_3<7+10\Leftrightarrow K_1K_3<17$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες κατά μέλη βρίσκουμε:

$$K_1K_2+K_2K_3+K_1K_3<13+16+17\Leftrightarrow K_1K_2+K_2K_3+K_1K_3<46$$

Επομένως ο χιλιομετρητής θα έπρεπε να γράψει απόσταση μικρότερη του 46 και όχι 48.

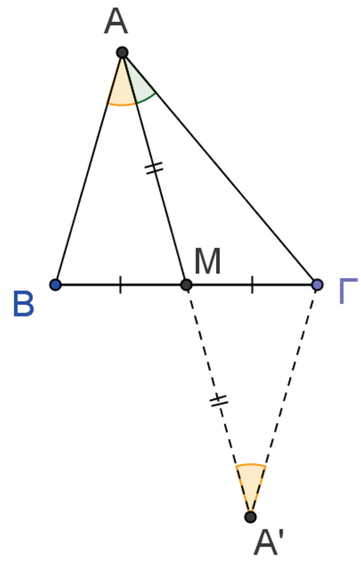
Α3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ.Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathrm{B\hat{A}M} > \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$,

ii) $\dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

Λύση:



Προεκτείνουμε την διάμεσο κατά $\mathrm{MA'} = \mathrm{AM}$ και φέρνω και την $\mathrm{A'\Gamma}$.

Τα τρίγωνοα ΑΜΒ και $\mathrm{A'M\Gamma}$ έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{MA'} = \mathrm{AM} \\ \mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} \\ \hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2\end{array}\right\} \Rightarrow$$ είναι ίσα οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma A'}$ και $\mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{M\hat{A}'\Gamma}$

i) Αφού μας δίνεται ΑΓ>ΑΒ και $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma A'}$ θα είναι $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{\Gamma A'}$ οπότε τρίγωνο $\mathrm{A'\Gamma A}$ από το § 3.11 Θεώρημα έχουμε: $\mathrm{M\hat{A}'\Gamma} > \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$ από την οποία προκύπτει λόγω της $\mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{M\hat{A}'\Gamma}$ ότι $\mathrm{B\hat{A}M} > \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$

ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\mathrm{A'\Gamma A}$ παίρνουμε:

$$\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{\Gamma A'} < \mathrm{AA'} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma A'} \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB} < \mathrm{AA'} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{AB} \Leftrightarrow \beta - \gamma < 2\mu_\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow$$

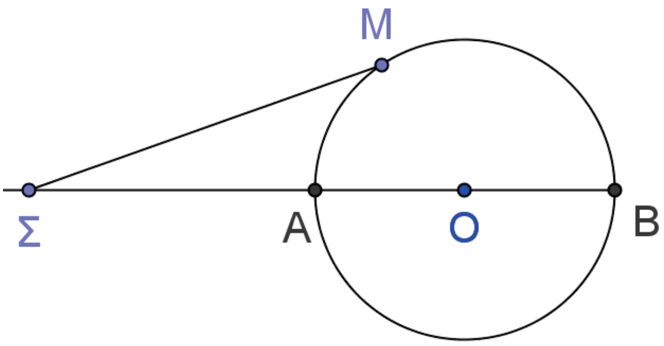
$$\frac{\beta-\gamma}{2} < \frac{2\mu_\alpha}{2} < \frac{\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

iii) Σύμφωνα με το ii)

$\mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\mu_\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, $\mu_\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$$

Α4. Έστω κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA. Για κάθε σημείο M του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. *(Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*



Λύση:

Αφού το Σ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου ισχύει ΣΟ>ακτίνα του κύκλου οπότε ΣΟ>ΟΜ.

Αν τα Σ,Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά, με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΣΟΜ έχουμε:

$$\Sigma O - OM < \Sigma M < \Sigma O + MO \Leftrightarrow \Sigma O - OA < \Sigma M < \Sigma O + OB \Leftrightarrow \Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$$

Αν $M \equiv A$ τότε: $\Sigma A = \Sigma M < \Sigma B$

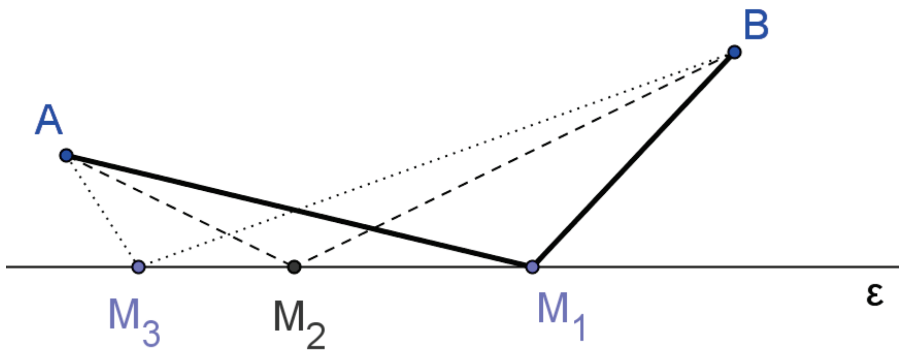
Αν $M \equiv B$ τότε: $\Sigma A < \Sigma M = \Sigma B$

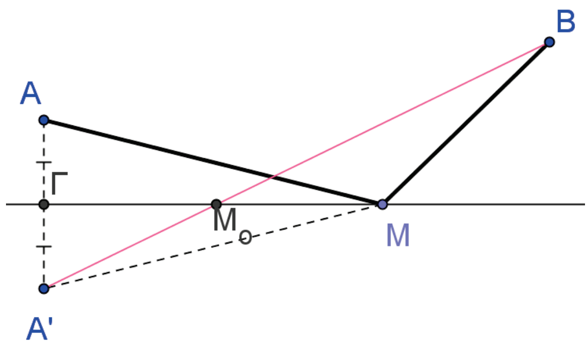
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της.Αν πάρουμε διάφορα σημεία $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3$,...πάνω στην ε, τότε το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα Α και Β $\mathrm{M_iA+M_iB}$ παίρνει διάφορες τιμές.

Για ποιά θέση του Μ το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

Λύση:





Φέρνουμε το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε.

Τότε η ε είναι μεσοκάθετη του $\mathrm{A'A}$, οπότε $\mathrm{MA=MA'}$ και επομένως $\mathrm{MA+MB=MA'+MB}$ **(1).**

- Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος $\mathrm{A'B}$, από το τρίγωνο $\mathrm{MA'B}$ *(τριγωνική ανισότητα)* έχουμε:

$\mathrm{MA'+MB>A'B}$ **(2).**

- Αν το Μ είναι σημείο του τμήματος $\mathrm{A'B}$ έχουμε: $\mathrm{MA'+MB=A'B}$ (3)

Αρα σε κάθε περίπτωση *(συνδιάζοντας τις (2) και (3))* ισχύει:

$\mathrm{MA'+MB\geq A'B}$ οπότε λόγω της **(1)** έχουμε:

$\mathrm{MA+MB\geq A'B}$

Αρα η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $\mathrm{MA+MB}$ είναι $\mathrm{A'B}$ και αυτή επιτυγχάνεται όταν το Μ είναι το σημείο τομής της $\mathrm{A'B}$ με την ευθεία **ε**.

Σ1. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ} > \frac{\text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ}}{2}$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

Λύση:

i) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ παίρνουμε αντίστοιχα: ΑΒ<ΟΑ+ΟΒ, ΒΓ<ΟΒ+ΟΓ, ΓΔ<ΟΓ+ΟΔ, και ΑΔ<ΟΑ+ΟΔ, από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΟΑ+ΟΒ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΓ+ΟΔ+ΟΔ+ΟΑ} \Leftrightarrow \text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<2ΟΑ+2ΟΒ+2ΟΓ+2ΟΔ} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<2}\left(\text{ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ}\right) \Leftrightarrow \frac{\text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ}}{2}\text{<ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ>}\frac{\text{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ}}{2}$$

ii) Αν το Ο δεν είναι σημείο της ΑΓ, από το τρίγωνο ΑΟΓ προκύπτει ότι :

$\text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} > \text{ΑΓ}$ και αν το Ο είναι σημείο της διαγωνίου ΑΓ θα είναι $\text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} = \text{ΑΓ}$ **.**Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $\text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} \geq \text{ΑΓ}$ **(1)** και το άθροισμα $\text{ΟΑ} + \text{ΟΓ}$ γίνεται ελάχιστο όταν γίνεται ίσο με ΑΓ το οποίο συμβαίνει όταν Ο σημείο της ΑΓ.

Αν το Ο δεν είναι σημείο της ΒΔ, από το τρίγωνο ΒΟΔ προκύπτει ότι :

$\text{ΟΒ} + \text{ΟΔ} > \text{ΒΔ}$ και αν το Ο είναι σημείο της διαγωνίου ΒΔ θα είναι $\text{ΟΒ} + \text{ΟΔ} = \text{ΒΔ}$.Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $\text{ΟΒ} + \text{ΟΔ} \geq \text{ΒΔ}$ **(2)** και το άθροισμα $\text{ΟΒ} + \text{ΟΔ}$ γίνεται ελάχιστο όταν γίνεται ίσο με ΒΔ το οποίο συμβαίνει όταν Ο σημείο της ΒΔ.

Αθροίζοντας τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$\text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΔ} \geq \text{ΑΓ} + \text{ΒΔ} \Leftrightarrow \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} + \text{ΟΔ} \geq \text{ΑΓ} + \text{ΒΔ}$$

δηλαδή η ελάχιστη τιμή του $\text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} + \text{ΟΔ}$ είναι $\text{ΑΓ} + \text{ΒΔ}$ και συμβαίνει όταν το Ο είναι σημείο της ΑΓ και της ΒΔ δηλαδή όταν το Ο είναι σημείο τομής των διαγωνίων $\text{Ο} \equiv \text{Κ}$

Σ2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ=ΑΓ και ΑΕ=ΑΒ αντίστοιχα.Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ.Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της ΒΜΕ διέρχεται από το σημείο Α.

xc

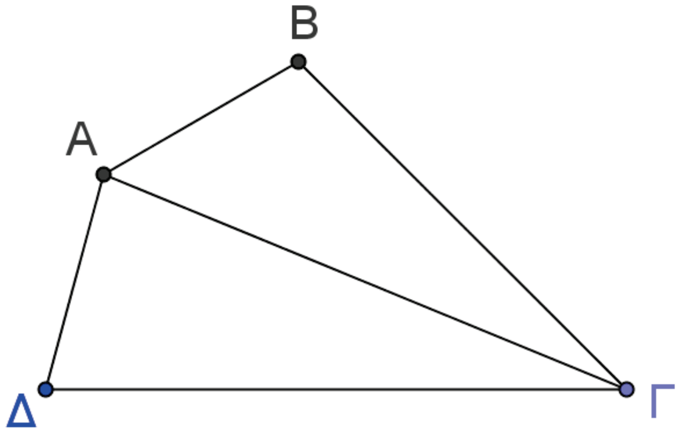
Σ3. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΓΔ **και** ΑΓ+ΒΔ>ΑΔ +ΒΓ,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

Λύση:



i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

ΑΓ<ΑΒ+ΒΓ

Στο τρίγωνο ΑΔΓ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

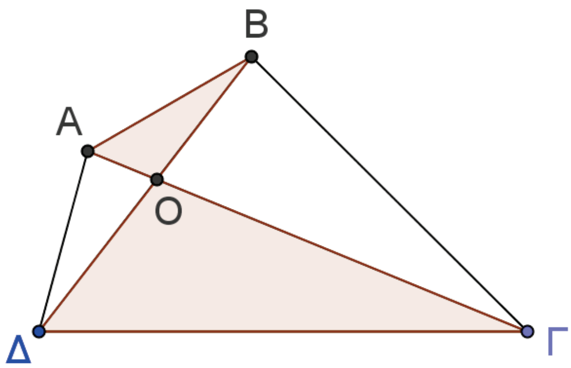
ΑΓ<ΑΔ+ΔΓ

Αθροίζοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

ΑΓ+ΑΓ<ΑΒ+ΒΓ+ΑΔ+ΔΓ $\Leftrightarrow 2\mathrm{A\Gamma} < 2\tau \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} < \tau$

όπου με τ συμβολίζουμε την ημιπερίμετρο του τετραπλεύρου και με 2τ την περίμετρό του.

ii) Στο τρίγωνο ΑΟΒ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:



ΑΟ+ΟΒ>ΑΒ **(3)**

Στο τρίγωνο ΔΟΓ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

ΔΟ+ΟΓ>ΔΓ **(4)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(3)** και **(4)** προκύπτει:

ΑΟ+ΟΒ+ΔΟ+ΟΓ>ΑΒ+ΔΕ $\Leftrightarrow$ ΑΟ+ ΟΓ+ΟΒ+ΔΟ+ >ΑΒ+ΔΕ $\Leftrightarrow$ ΑΓ+ΒΔ >ΑΒ+ΔΕ **(5)**

Στο τρίγωνο ΑΟΔ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

ΑΟ+ΟΔ>ΑΔ **(6)**

Στο τρίγωνο ΒΟΓ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

ΒΟ+ΟΓ>ΒΓ **(7)**

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

ΑΟ+ΟΔ+ΒΟ+ΟΓ>ΑΔ+ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΑΟ+ ΟΓ+ΒΟ+ΟΔ >ΑΔ+ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΑΓ+ΒΔ >ΑΔ+ΒΓ **(8)**

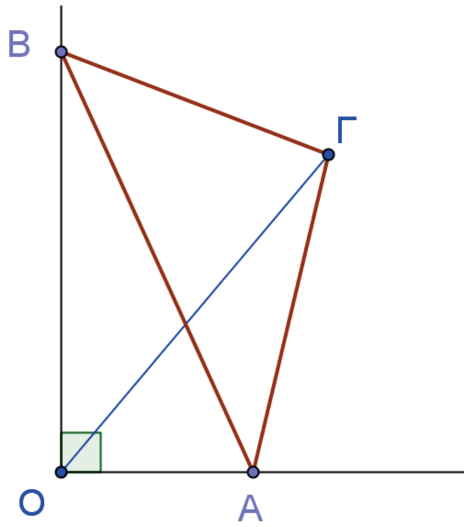
Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(5)** και **(8)** έχουμε:

iii) $2\text{ΑΓ}+2\text{ΒΔ} > \text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ} \Leftrightarrow 2\left(\text{ΑΓ}+\text{ΒΔ}\right) > \text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ} \Leftrightarrow$

$$\text{ΑΓ}+\text{ΒΔ} > \frac{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ}}{2}.$$

Σχόλιο §3.12 *Γενικότερα ισχύειΤο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη § 2.20 γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.*

Σ4. Στο εσωτερικό ορθής γωνίας xÔy θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.



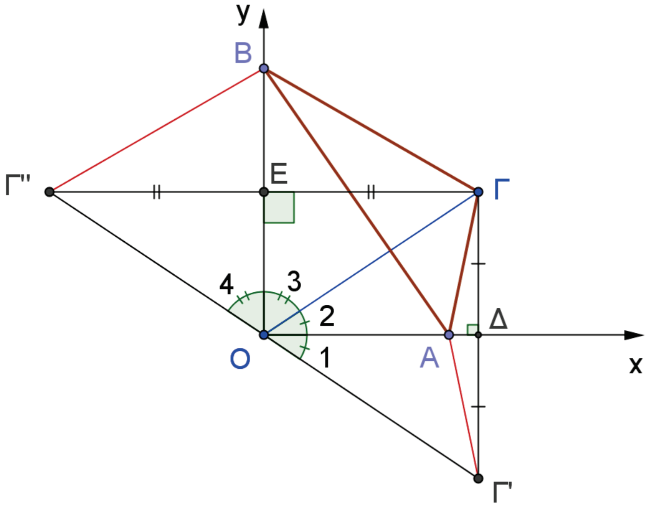
Λύση:

Σκέψη: *Σκεφτόμαστε πως μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα τμήμα ίσο με 2ΟΓ.*

- Μια ιδέα είναι αυτή του βιβλίου να δημιουργήσει δύο «αντίγραφα» του ΟΓ με κοινό άκρο το Ο και να δείξει ότι είναι συνευθειακά.
- Μια άλλη ιδέα, η πιο αυθόρμητη και πιο απλή είναι να προεκτείνουμε το ΓΟ και να πάρουμε σημείο Γ’ ώστε Γ’Ο=ΟΓ.

Προσπαθούσα να δώ γιατί μια τέτοια ιδέα δεν θα ήταν αποτελεσματική (αφού δεν την χρησιμοποιεί το σχολικό) αλλά κατέληξα ακριβώς στο αντίθετο.Και λύση δίνει που είναι μάλιστα και πιο απλή.

$1^{Η}$ Λύση σχολικού



Από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην Οx, που την τέμνει στο σημεία Δ και παίρνουμε τμήμα Γ’Δ=ΓΔ *(το Γ’ λέγεται συμμετρικό του Γ ως προς Οx)*. Αφού η Οx μεσοκάθετος του ΓΓ’ ισχύει

ΑΓ’=ΑΓ= και ΟΓ’=ΟΓ.

Από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην Οy, που την τέμνει στο σημείο Ε και παίρνουμε τμήμα Γ’’Ε=ΓΕ (*το Γ’’ λέγεται συμμετρικό του Γ ως προς Οy)*. Αφού η Οx μεσοκάθετος του ΓΓ’’ ισχύει

ΒΓ’’=ΒΓ= και ΟΓ’’=ΟΓ.

►Θα δείξουμε ότι η $\Gamma'\hat{O}\Gamma''$ είναι ευθεία.Γι αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma'\hat{O}\Gamma''=180°$

• Στο ισοσκελές τρίγωνο Γ’ΟΓ το ύψος ΟΔ είναι και διχοτόμος άρα $\hat{O}_1=\hat{O}_2$

• Στο ισοσκελές τρίγωνο Γ’’ΟΓ το ύψος ΟΕ είναι και διχοτόμος άρα $\hat{O}_3=\hat{O}_4$

Οπότε:

$$\Gamma'\hat{O}\Gamma''=\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=2\hat{O}_2+2\hat{O}_3==2\left(\hat{O}_2+\hat{O}_3\right)=2\cdot 90°=180°$$

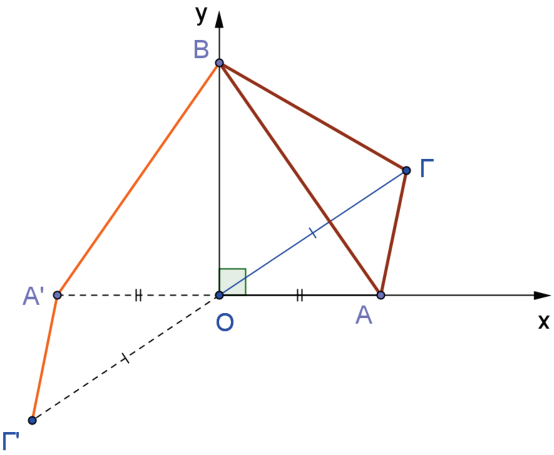
Αρα το $\Gamma'\Gamma''$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

Από σχόλιο του σχολικού βιβλίου§ 3.12 γνωίζουμε ότι:

«Γενικότερα ισχύει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.»

Αρα $\Gamma''\Gamma'<\Gamma''B+BA+A\Gamma'=\Gamma B+BA+A\Gamma=$ περίμετρος του ΑΒΓ

$2^{Η}$ Λύση



Παίρνουμε το συμμετρικό Γ’ του Γ ως προς Ο καθώς και το συμμετρικό Α’ του Α ως προς Ο.

Είναι $\Gamma\Gamma'=2O\Gamma$ και $A'B=AB$ (το τρίγωνο $A'BA$ είναι ισοσκελές αφού το ύψος είναι και διάμεσος.

Επίσης $A'B=AB$ αφού τα τρίγωνα $A'O\Gamma'$ και $AO\Gamma$ είναι ίσα (ΠΓΠ).

Αρα από το σχόλιο του σχολικού βιβλίου § 3.10 έχουμε:

$$\Gamma'\Gamma<\Gamma'A'+A'B+BA=\Gamma A+BA+\Gamma A=\text{περίμετρος του } AB\Gamma$$