ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Επίπεδο 2

έως και 4.8

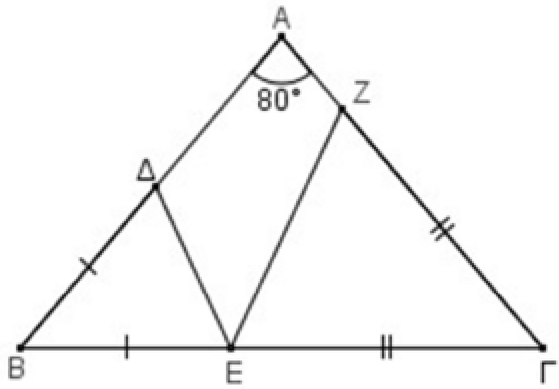
Ασκήσεις: 2814, 5572, 5142, 5573, 5578, 6593, 6595

ΘΕΜΑ 2_2814

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ είναι $\hat{A}$=80°. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ=ΒΕ και ΓΕ=ΓΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta E Z}$. (Μονάδες 10)



Λύση:

α) Αφού ΑΒΓ ισοσκελές

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180° - \hat{A}}{2} = \frac{180° - 80°}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$$

Επειδή ΒΕ=ΒΔ θα είναι

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 = \frac{180° - \hat{B}}{2} = \frac{180° - 50}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

Επειδή ΓΕ=ΓΖ θα είναι

$$\hat{Z}_1 = \hat{E}_2 = \frac{180° - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{180° - 50°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

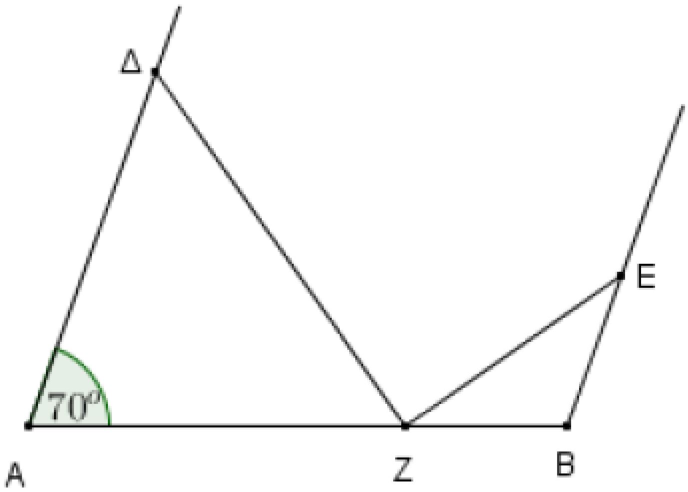
β) $\widehat{\Delta E Z} = 180° - \hat{E}_1 - \hat{E}_2 = 180° - 65° - 65° = 50°$

ΘΕΜΑ 2 5572

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΑΖ , ΒΕ=ΒΖ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$. (Μονάδες 9)



Λύση:

Αφού ΑΔ=ΑΖ το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές οπότε οι προσκείμενες στην βάση γωνίες του είναι ίσες Αρα

$$\hat{\Delta} = \hat{Z}_1 = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

Επειδή ΑΔ//ΒΕ οι $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά οπότε

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Αφού ΒΕ=ΒΖ το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές οπότε οι προσκείμενες στην βάση γωνίες του είναι ίσες Αρα:

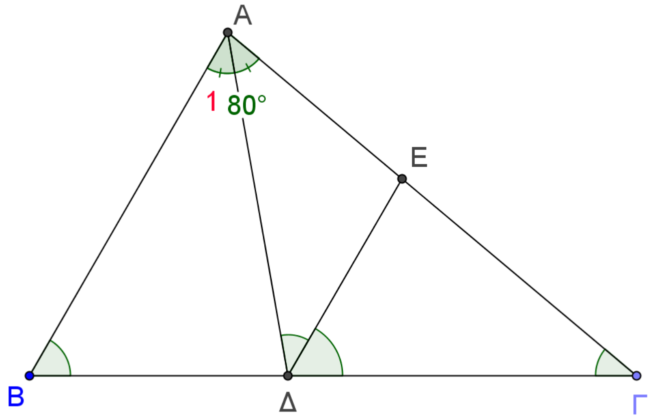
$$\hat{E} = \hat{Z}_2 = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

ΘΕΜΑ 2   5142

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 13)



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και αντικαθιστώντας από τα δεδομένα

$\hat{A} + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$100^\circ + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow$

$\hat{\Gamma} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

οπότε $\hat{B} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$

β) $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$

$A\hat{\Delta}E = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Αρα $A\hat{\Delta}E = 40^\circ$.

$E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ.

ΘΕΜΑ 2   5573

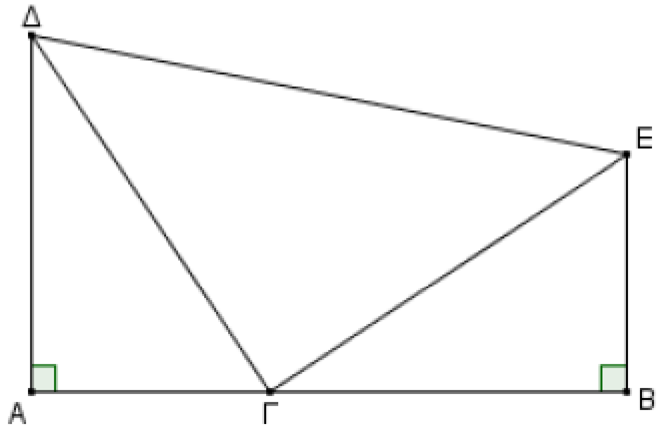
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ=ΒΓ και ΑΓ=ΒΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\overset{\wedge}{\mathrm{E\Gamma B}} = 40^o$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

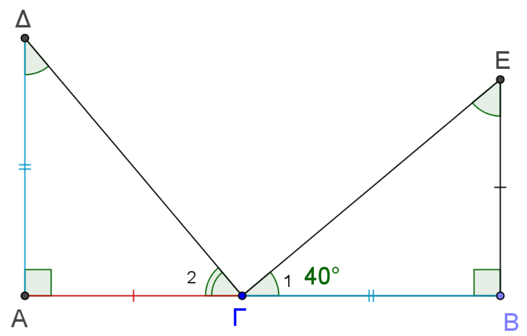
(Μονάδες 12)



Λύση:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A\Delta = B\Gamma} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90° \\ \mathrm{A\Gamma = BE} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$



Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma\Delta = \Gamma E \\ \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1 \\ \hat{\Gamma}_2 = \hat{E} \end{array}\right\}$$

β) Αφού όπως δείξαμε ΓΔ=ΓΕ το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές.

$$\Delta\hat{\Gamma}E = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{E} = 90°$$

Αρα το τρίγνωο ΔΓΕ είναι και ορθογώνιο.

Δείξαμε λοιπόν ότι το ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

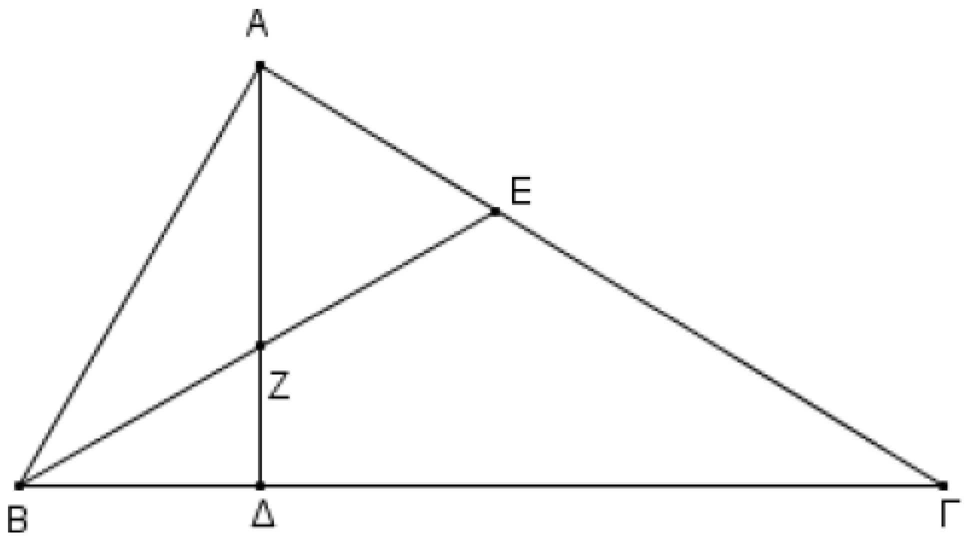
<u>Σημείωση</u>: *Δεν χρειάζεται το δεδομένο ότι η γωνία* $E\hat{\Gamma}B = 40°$

ΘΕΜΑ 2   5578

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60°. (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ:

α) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{\Gamma}+\hat{B}=180^\circ$

Η τελευταία σχέση με βάση το δεδομένο $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ γίνεται:

$$2\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ έχει δύο γωνίες ίσες με 60°, αφού τότε και η τρίτη γωνία θα είναι 60° οπότε το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο *(Πόρισμα (iii) σ.54)*

Αφού όπως δείξαμε στο **α)** είναι $\hat{B}=60^\circ$, θα είναι:

$\hat{A}+\hat{\Gamma}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ και αντικαθιστώντας σύμφωνα με το δεδομένο $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=\frac{120^\circ}{4}=30^\circ \text{ και } \hat{A}=3\hat{\Gamma}=3\cdot 30^\circ=90^\circ$$

► Αφού ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

θα είναι: $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

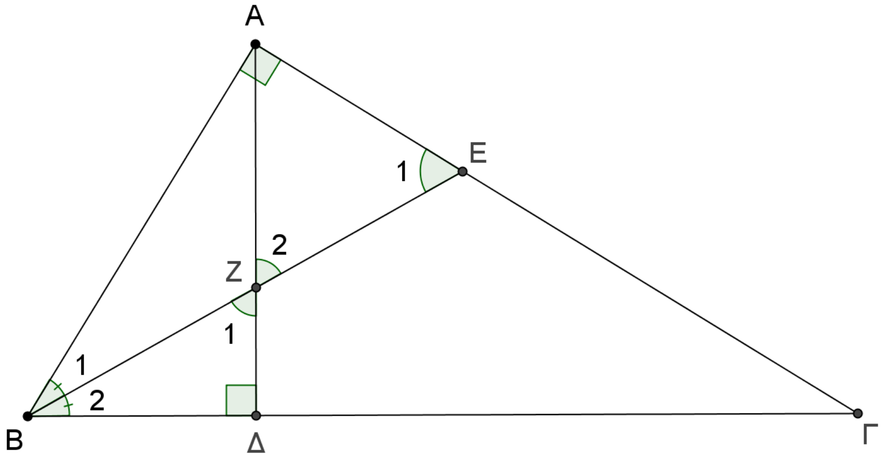
οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο

ΑΒΕ θα είναι: $\hat{E}_1 = 90° - 30° = 60°$

► Αφού ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

θα είναι:

$\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$



Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΒ έχουμε : $\hat{Z}_1 = 90° - 30° = 60°$.Τέλος ισχύει $\hat{Z}_2 \overset{\text{κατακορυφήν γωνίες}}{=} \hat{Z}_1 = 60°$

<u>Σημείωση:</u> *Μια άλλη άσκηση θα ήταν να μας δίνεται ότι το ΑΕΖ είναι ισόπλευρο και να πρέπει να δείξουμε ότι* $\hat{A} = 90°$

ΘΕΜΑ 2 6593

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

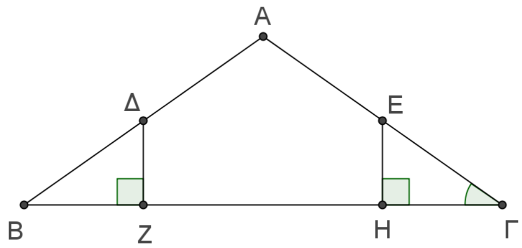
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ.Αυτά έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\hat{Z} = \hat{H} = 90° \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ B\Delta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = E\Gamma\end{array}\right\}$$ *(§ 3.6 Θεώρημα Ι)* είναι ίσα



οπότε θα έχουν και ΔΖ=ΕΖ δηλαδή τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ ισαπέχουν από την βάση ΒΓ.

β) Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} = 75° + \hat{B}$ οπότε αντικαθιστώντας στην

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow 75° + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180° \Rightarrow 75° + 3\hat{B} = 180° \Rightarrow 3\hat{B} = 180° - 75° \Rightarrow 3\hat{B} = 105° \Rightarrow$$

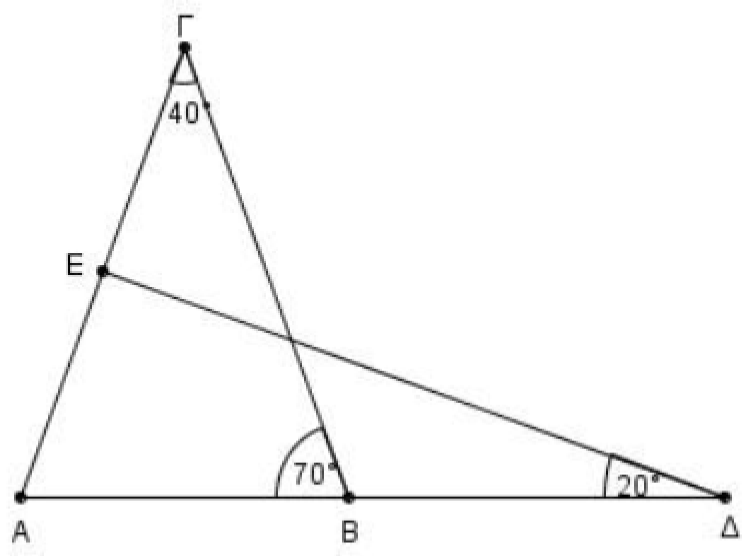
$$\hat{B} = \frac{105°}{3} \Rightarrow \hat{B} = 35°$$

ΘΕΜΑ 2   6595

Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



Λύση:

α) Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \Rightarrow \hat{A}+70°+40°=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-70°-40° \Rightarrow \hat{A}=70°$.

Επειδή $\hat{A}=\hat{B}$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε:

$A\hat{E}\Delta+\hat{A}+\hat{\Delta}=180° \Rightarrow A\hat{E}\Delta+70°+20°=180° \Rightarrow A\hat{E}\Delta=180°-70°-20°=90°$.