2ο Φυλλάδιο 4.1-4.2

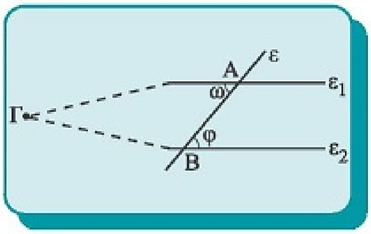
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γωνίες, θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, **που εξασφαλίζει την ύπαρξη παράλληλων ευθειών.**

Θεώρημα

Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δυο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Απόδειξη:

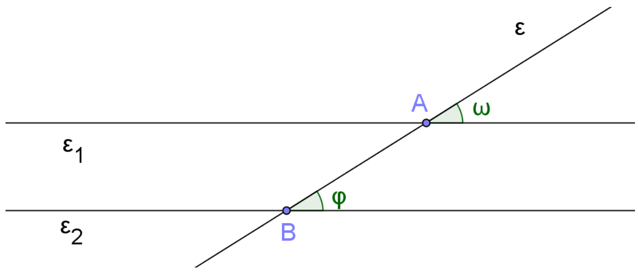
Έστω ότι ω = φ.



Αν οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι **άτοπο**. (§ 3.10) Άρα $ε_1 // ε_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

α. Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δυο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες τότε είναι παράλληλες.

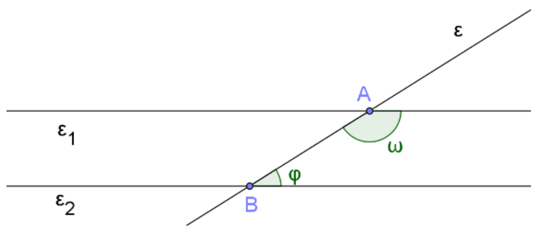


Απόδειξη:

Εστω ω=φ.Ομως επιπλέον $\omega = \hat{A}_1$ ως κατακορυφήν.

Αρα $\varphi = \hat{A}_1$ δηλαδή οι ε1 και ε2 τεμνόμενες από την ε σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε $ε_1 // ε_2$.

β. Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν ή δυο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές,



Απόδειξη:

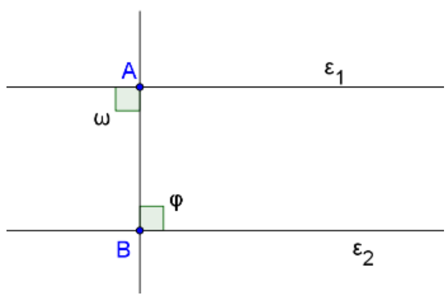
Εστω ω+φ=180°.Ομως επιπλέον $\omega + \hat{A}_1 = 180°$ οπότε $\varphi = \hat{A}_1$

Αρα $\varphi = \hat{A}_1$ ως παραπληρωματικές της ίδια γωνίας ω.

Δείμαμε ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τεμνόμενες από την ε σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε $ε_1 // ε_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



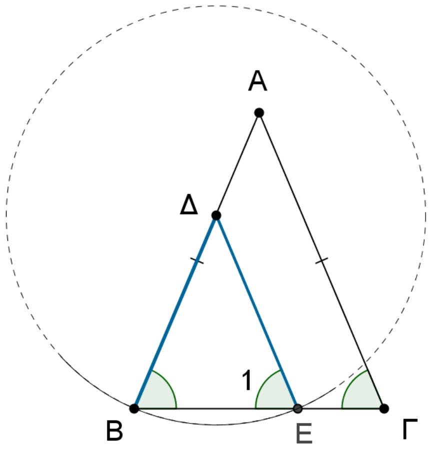
Απόδειξη:

Πραγματι οι γωνίες ω και φ είναι ορθές οπότε ω=φ.

Αρα $ε_1 // ε_2$.

Ε4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ,ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ.

Λύση:

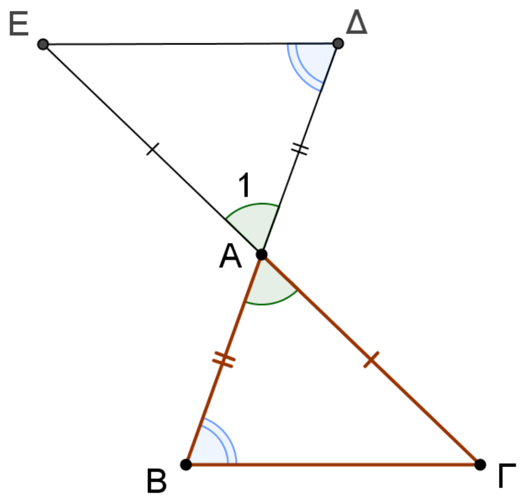


- Αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.
- Αφού ΔΒ=ΔΕ ως ακτίνες του κύκλου (Δ, ΔΒ), θα είναι $\hat{B}=\hat{E}_1$.

Αρα $\hat{\Gamma}=\hat{E}_1$ δηλαδή οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ, τεμνόμενες από την ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες οπότε *(Πόρισμα Ι)* θα είναι ΔΕ//ΑΓ.

Ε5. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

Λύση:



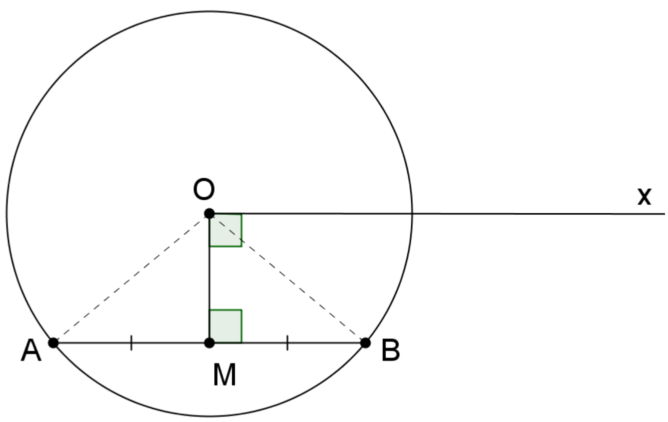
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A\Delta \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \text{ ως κατακορυφήν} \\ A\Gamma = AE \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν

$\hat{B}=\hat{\Delta}$ δηλαδή οι ευθείες ΔΕ και ΒΓ τεμνόμενες από την ΒΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες οπότε από Θεώρημα είναι ΔΕ//ΒΓ.

Ε6. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε Οx ⊥ ΟΜ. Να αποδείξετε ότι Οx//ΑΒ.

Λύση:



ΟΑ=ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ η διάμεσος ΟΜ είναι και ύψος συνεπώς $OM \perp AB$ ή $AB \perp OM$.

Οι ευθείες λοιπόν Οx και ΑΒ είναι και οι δύο κάθετες στην ΟΜ επομένως ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ είναι παράλληλες.

***Σημείωση**: Γνωρίζουμε §3.6 Πόρισμα ότι η κάθετος από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χοδή την διχοτομεί οπότε και από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι* $OM \perp AB$