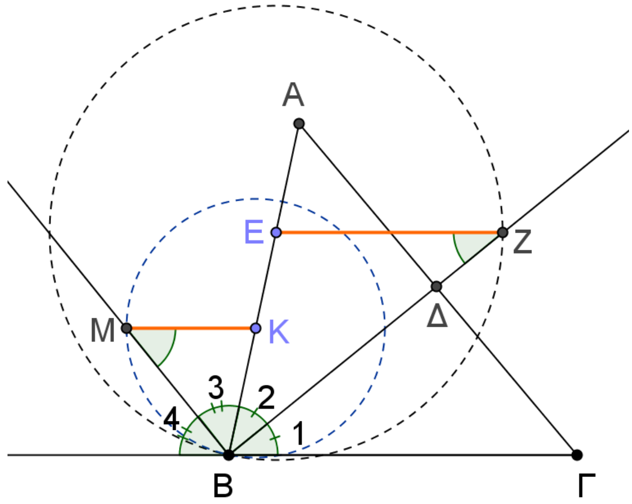
4.1-4.2 Σύνθετα θέματα (version 3-1-2016)

Σ1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε,ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ,ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.

Σημείωση: *Είναι μια ωραία άσκηση στο βασικό σχήμα (από τα 2 παίρνω το 3^{ο}) όπου έχουμε την διχοτόμο και το ισοσκελές και παίρνουμε την παραλληλία*



Λύση:

● Αφού ΕΒ=ΕΖ (ως ακτίνες του κύκλου (Ε,ΕΒ)) θα είναι

$\hat{Z} = \hat{B}_1$ **(1)**

Αλλά ΒΖ διχοτόμος οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\hat{Z} = \hat{B}_2$

Οι ευθείες ΕΖ και ΒΓ τεμνόμενες από την ΖΒ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες άρα ΕΖ//ΒΓ **(3)**

● Αφού ΚΒ=ΚΜ (ως ακτίνες του κύκλου (Κ,ΚΒ)) θα είναι

$\hat{M} = \hat{B}_3$ **(4)**

Αλλά ΒΜ διχοτόμος οπότε $\hat{B}_3 = \hat{B}_4$ **(5)**

Από **(4)** και **(5)** προκύπτει ότι $\hat{M} = \hat{B}_4$

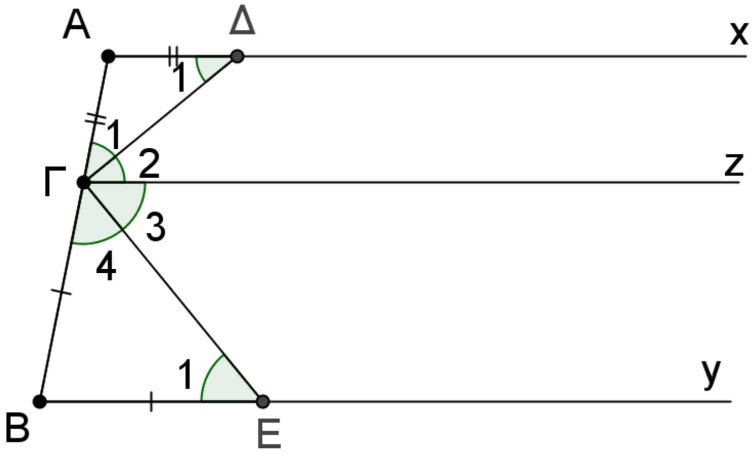
Οι ευθείες ΜΚ και ΒΓ τεμνόμενες από την ΒΚ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες άρα ΜΚ//ΒΓ **(6)**

Από **(3)** και **(6)** προκύπτει ότι ΕΖ//ΜΚ *(§4.2 Πρόταση ΙΙ)*

Σ2. Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx,Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΓΕ είναι ορθή.

Λύση:

α' τρόπος:



Αφού ΑΔ=ΑΓ θα είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$

Φέρνουμε Γz//Αx.Τότε $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ.

Αρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ οπότε ΓΔ διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}z$

Αφού ΒΕ=ΒΓ θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_4$

Αφού Γz//Αx και Αx // Βy θα είναι

Γz// Βy

Επομένως $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_3$ ως εντός εναλλάξ

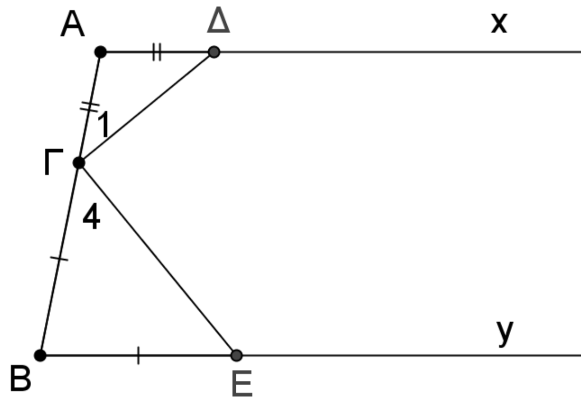
Αρα $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$ οπότε ΓΕ διχοτόμος της $B\hat{\Gamma}z$

μένωΓνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες μεταξύ τους άρα $\Delta\hat{\Gamma}E = 1\llcorner$

β' τρόπος: *(Χρησιμοποιώντας ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° που διδάσκεται πιο κάτω στην ύλη)*

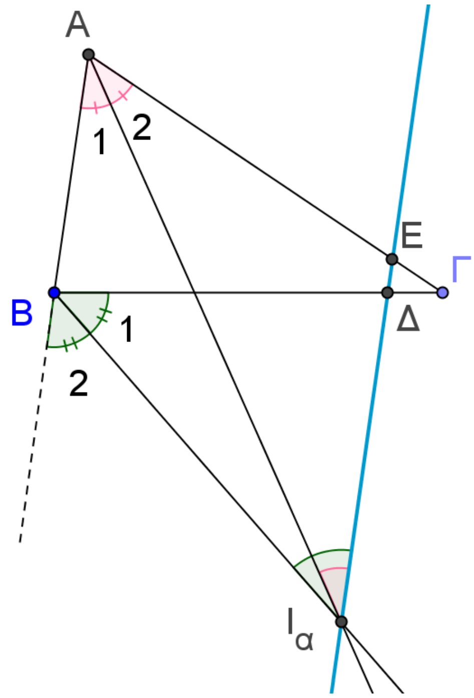
$$\Delta\hat{\Gamma}E = 180° - \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_4 = 180° - \frac{180° - \hat{A}}{2} - \frac{180° - \hat{B}}{2} = 180° - 90° + \frac{\hat{A}}{2} - 90° + \frac{\hat{B}}{2} =$$

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$



Σ3. Από το παράκεντρο I_α τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ - ΒΔ.

Λύση:



Είναι $\Delta E = I_\alpha E - I_\alpha \Delta$ **(1).**

Αφού $I_\alpha E // AB$ είναι $\hat{A}_1 = A\hat{I}_\alpha E$ ως εντός εναλλάξ.

Αφού επιπλέον $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ παίρνουμε $A\hat{I}_\alpha E = \hat{A}_2$

οπότε $I_\alpha E = AE$ **(2).**

Αφού $I_\alpha E // AB$ είναι $\hat{B}_2 = \Delta\hat{I}_\alpha B$ ως εντός εναλλάξ.

Αφού επιπλέον $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ παίρνουμε $\hat{B}_1 = \Delta\hat{I}_\alpha B$

οπότε $I_\alpha \Delta = B\Delta$ **(3).**

Η σχέση (1) βάση των (2) και (3) γίνεται:

$\Delta E = I_\alpha E - I_\alpha \Delta = AE - B\Delta$

Σ4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

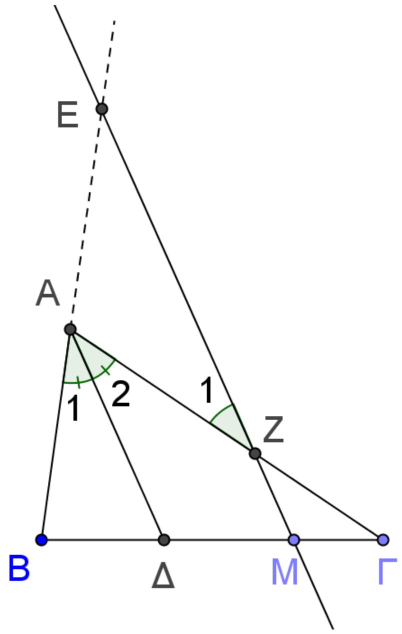
ii) ΒΕ+ΓΖ = σταθερό.

iii) Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:

α) $\mathrm{BE} = \Gamma\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma + \mathrm{AB}}{2}$,

β) $\mathrm{AE} = \mathrm{AZ} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma - \mathrm{AB}}{2}$

Λύση:



i) $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{A}}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΕΜ που τέμνονται από την ΑΒ.

$\hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΕΜ που τέμνονται από την ΑΓ.

Επειδή όμως ΑΔ διχοτόμος θα είναι $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$, οπότε τελικά $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{Z}}_1$.

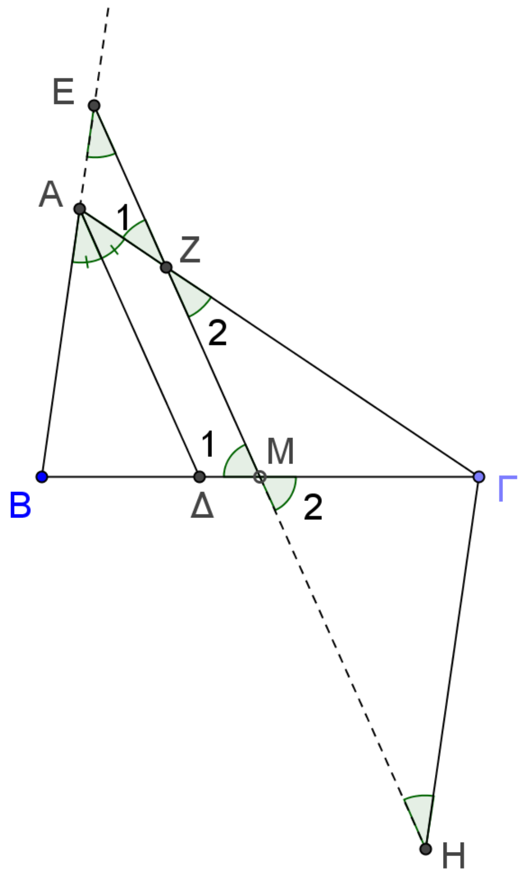
Αρα ΑΖ=ΑΕ.

ii) $\mathrm{BE} + \Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{AB} + \mathrm{AE} + \Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{AB} + \mathrm{AZ} + \Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{AB} + \mathrm{A}\Gamma$ σταθερό.

iii) *<u>Σκέψη:</u> Ενας τρόπος να δείξουμε ότι δύο μή συνευθειακά τμήματα <u>με κοινό άκρο</u> είναι ίσα, είναι να δείξουμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν, έχει δύο γωνίες ίσες.Εδώ τα ΒΕ και ΓΖ που θέλω να δείξω ότι είναι ίσα δεν είναι διαδοχικά.Αρα θα προσπαθήσω να κατασκευάσω ένα τμήμα διαδοχικό με το ΓΖ που να είναι ίσο με το ΒΕ.Και πώς γίνεται αυτό; Το έχουμε ξανασυντήσει ουσιαστικά όταν προεκτείνουμε σε κάποιες ασκήσεις την διάμετρο κατά ίσο τμήμα.Εδώ έχουμε ένα πιο γενικό σχήμα και καταλαβαίνουμε ότι το ουσιαστικό δεν είναι το τρίγωνο και η διάμεσος αλλά ένα ευθ. τμήμα, το μέσο του και ένα σημείο που δεν βρίσκεται στον φορέα του τμήματος.*

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν και δεν είναι εύκολο να σκεφτούμε την λύση είναι αρκετά ευλογοφανής η πορεία της.

Προεκτείνω την ΕΜ κατά τμήμα ΜΗ=ΜΗ



Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΓΗΜ έχουν:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{BM}=\mathrm{M\Gamma}\ \text{αφού Μ μέσο}\\ &\hat{\mathrm{M}}_1=\hat{\mathrm{M}}_2\ \text{ως κατακορυφήν}\\ &\mathrm{EM}=\mathrm{MH}\ \text{εκ κατασκευής}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα.}$$

Αρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα:

ΒΕ=ΓΗ **(1)** και $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{H}}$.

Εχουμε δείξει στο i) ερώτημα ότι $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{Z}}_1$.

Επιπλέον $\hat{\mathrm{Z}}_1=\hat{\mathrm{Z}}_2$ ως κατακορυφήν.

Αρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{H}}=\hat{\mathrm{Z}}_2$ οπότε ΓΗ=ΓΖ και από την

(1) ΒΕ= ΓΖ.

α) Δείξαμε στο **ii)** ότι $\mathrm{BE}+\mathrm{\Gamma Z}=\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}$ και επειδή ΒΕ= ΓΖ

έχουμε ότι:

$2\mathrm{BE}=\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow \mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$.Αρα τελικά

$\mathrm{BE}=\mathrm{\Gamma Z}=\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

β) Εχουμε δείξει στο **i)**ότι ΑΕ=ΑΖ.

$$\mathrm{AE}=\mathrm{BE}-\mathrm{AB}\overset{\alpha)}{=}\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}-\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}-2\mathrm{AB}}{2}=\frac{\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AB}}{2}.$$