4.6-4.8 ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ (version 7-2-2016)

Α1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}\varepsilon\xi = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Λύση:

1ος τρόπος σχολικό

$\hat{B}\varepsilon\xi = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$ *(κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών)* $\Leftrightarrow 2\hat{B}\varepsilon\xi = 2\cdot 90° + 2\cdot\frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{B}\varepsilon\xi = 180° + \hat{A}$

Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών

Αρα

2ος τρόπος σχολικό

$2\left(\hat{A}+\hat{\Gamma}\right) = 180° + \hat{A}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

$$\hat{B}\varepsilon\xi = 90° + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 180° - \hat{B} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 90° - \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \cancel{\frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{B} = \cancel{\frac{\hat{A}}{2}}$$

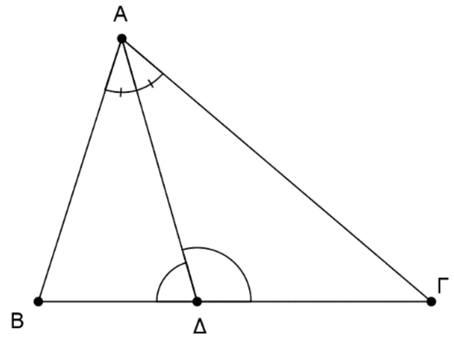
$$\Leftrightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{B}$$

Α2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β > Γ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι

i) $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,

ii) $A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση:



Αφού η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ θα ισχύει:

$A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{A}_1$ **(1)**

Αφού η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΓ θα ισχύε:

$A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2$ **(2)**

Επιπλέον αφού ΑΔ διχοτόμος ισχύει:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ **(3)**

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} + \hat{A}_1 - \left(\hat{\Gamma} + \hat{A}_2\right) = \hat{B} + \hat{A}_1 - \hat{\Gamma} - \hat{A}_2 \overset{(3)}{=} \hat{B} - \hat{\Gamma}$$

Δείξαμε λοιπόν $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ **(4)**

ii) $A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}B = 180°$ **(5)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(4)** και **(5)** παίρνομε

$$2A\hat{\Delta}\Gamma = 180° + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{2A\hat{\Delta}\Gamma}{2} = \frac{180°}{2} + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

οπότε

$$A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}B = 180° \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B = 180° - A\hat{\Delta}\Gamma = 180° - \left(90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}\right) = 180° - 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

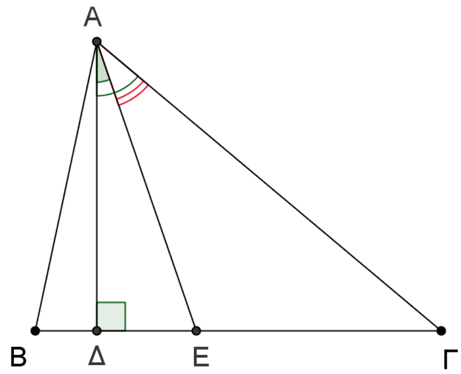
$$A\hat{\Delta}B = 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

Α3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ.Να αποδείξετε ότι :

$$\Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

Λύση:

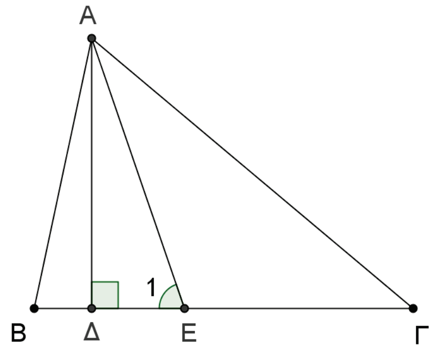
1ος τρόπος:



$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma - \Gamma\hat{A}E = 90° - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} = \cancel{\frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} - \cancel{\frac{\hat{A}}{2}} =$$

$$\frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

2ος τρόπος (σχολικό):



Στο τρίγωνο ΑΔΕ: $\Delta\hat{A}E + \hat{E}_1 = 90°$ **(1)**

Αλλά η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΓ οπότε:

$$\hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}$$

Από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \dfrac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \dfrac{180°}{2} \Leftrightarrow$

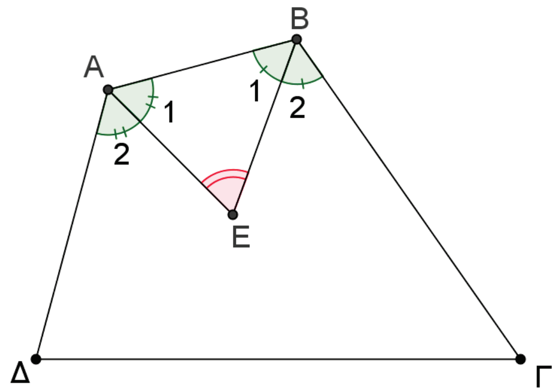
$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90° \Leftrightarrow 90° = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην **(1)** παίρνουμε:

$$\Delta\hat{A}E + \cancel{\frac{\hat{A}}{2}} + \hat{\Gamma} = \cancel{\frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Α4. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Β κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται σε σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{E}B}=\dfrac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$.

Λύση:



$$\mathrm{A\hat{E}B}=180^\circ-\hat{\mathrm{A}}_1-\hat{\mathrm{B}}_1=180^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Ομως:

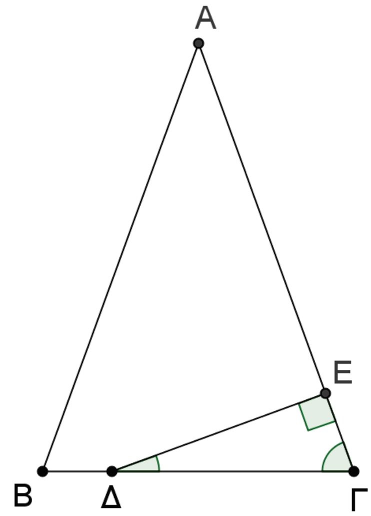
$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{360^\circ}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=180^\circ$$

Αρα η **(1)** γίνεται:

$$\mathrm{A\hat{E}B}=180^\circ-\hat{\mathrm{A}}_1-\hat{\mathrm{B}}_1=180^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$$

Α5. Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη ΔΕ ⊥ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 2 \cdot E\hat{\Delta}\Gamma$.



Λύση:

1ος τρόπος

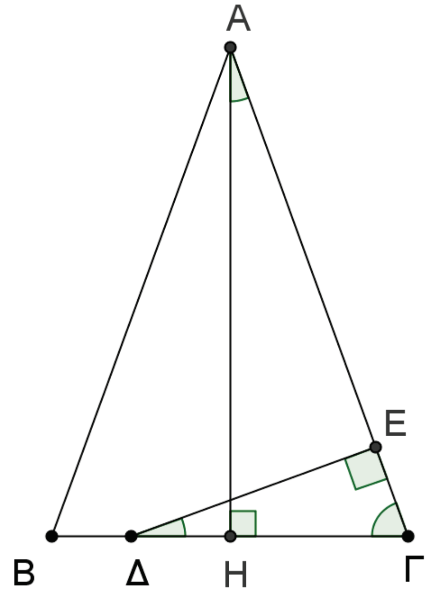
Εχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+2\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{A}=180^\circ-2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}=2\left(90^\circ-\hat{\Gamma}\right) \Leftrightarrow \hat{A}=2\cdot E\hat{\Delta}\Gamma$$

2ος τρόπος

Φέρνουμε το ύψος ΑΗ.Τότε το ΑΗ είναι και διχοτόμος οπότε



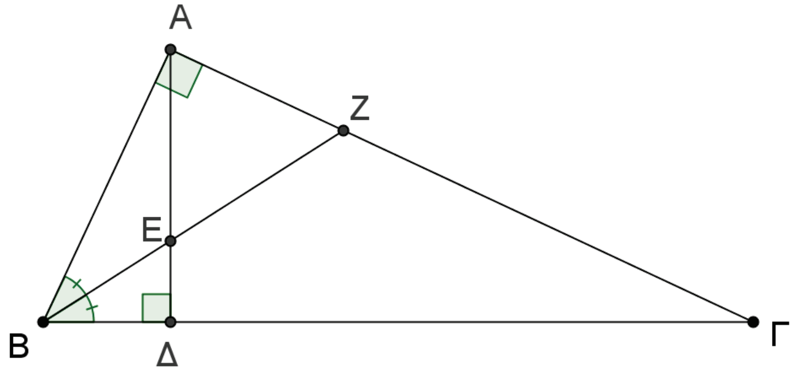
$$H\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{2}$$

Ομως $H\hat{A}B = E\hat{\Delta}\Gamma$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες (ή αλλιώς επειδή καθεμιά είναι ίση με $90^\circ-\hat{\Gamma}$)

Αρα $E\hat{\Delta}\Gamma=\frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \hat{A}=2\cdot E\hat{\Delta}\Gamma$

Α6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Λύση:



• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε:

$\hat{Z}_1 + \hat{B}_1 = 90° \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 90° - \hat{B}_1$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ έχουμε

$\hat{E}_2 + \hat{B}_2 = 90° \Leftrightarrow \hat{E}_2 = 90° - \hat{B}_2$

•Επειδή η ΒΖ είναι διχοτόμος είναι

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Επομένως $\hat{Z}_1 = \hat{E}_2$

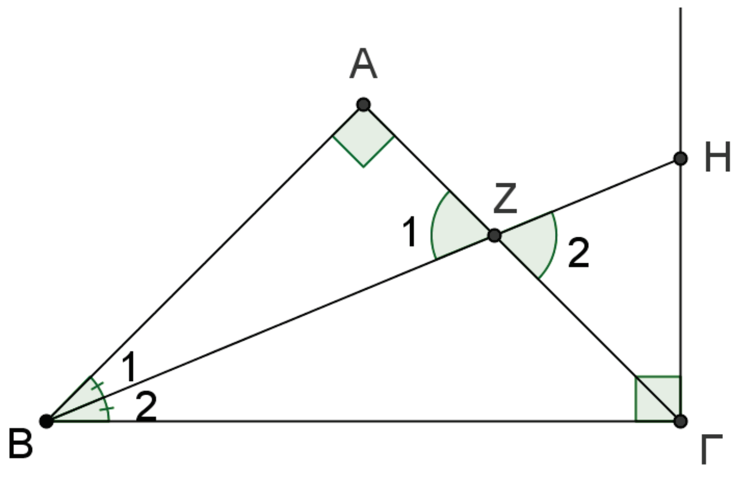
• Ομως $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ ως κατακορυφήν επομένως

$\hat{Z}_1 = \hat{E}_1$ οπότε ΑΕ=ΑΖ.

Α7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°). Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ, στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΓ = ΓΗ.*

Λύση:

<u>Σκέψη</u>: Αφού τα τμήματα που θέλω να δείξω ότι είναι ίσα έχουν ένα κοινό άκρο θα προσπαθήσω να δείξω ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν έχει δύο γωνίες ίσες οπότε θα είναι ισοσκελές.



• Στο τρίγωνο ΓΗΒ έχουμε:

$\hat{H} + \hat{B}_2 = 90° \Leftrightarrow \hat{H} = 90° - \hat{B}_2$

• Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε:

$\hat{Z}_1 + \hat{B}_1 = 90° \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 90° - \hat{B}_1$

Ομως αφού ΒΖ διχοτόμος θα είναι

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ οπότε $\hat{H} = \hat{Z}_1$.

Εξάλλου $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ ως κατακορυφήν οπότε

$\hat{H} = \hat{Z}_2$.Επομένως ΓΗ=ΓΖ.

***<u>Σημείωση</u>**: Είναι όμοια με την Α6.*

Γενικά μπορούμε να φέρουμε κάθετο σε οποιοδήποτε σημείο της ημιευθείας ΒΓ.