4.6-4.8 ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ (version 2-1-2016)

Ε1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα 2/3 μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).

Λύση:

Εστω ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathrm{A}} = 90°$.Προφανώς η $\hat{\mathrm{A}} = 90°$ ως μεγαλύτηρη γωνία του τριγώνου δεν μπορεί να είναι τα $\frac{2}{3} \cdot (\text{άλλης γωνίας του})$.

Εστω λοιπόν ότι η γωνία $\hat{\mathrm{B}} = \frac{2}{3} \cdot (\text{άλλης γωνίας του})$.Τότε

- αν $\hat{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}\hat{\mathrm{A}} = \frac{2}{3}90° = 2 \cdot 30° = 60°$ θα είναι $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90° - \hat{\mathrm{B}} = 36° = 90° - 60° = 30°$.
- αν $\hat{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}\hat{\Gamma}$, τότε αφού:

$$\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \frac{2}{3}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2}{3}\hat{\Gamma} + 3 \cdot \hat{\Gamma} = 3 \cdot 90° \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 3\hat{\Gamma} = 270° \Leftrightarrow 5\hat{\Gamma} = 270° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 54°$$

οπότε $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 90° - 54° = 36°$.

Ε2. Σε <u>ισοσκελές</u> τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\hat{\mathrm{A}} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Αν Ι το έγκεντρο (σημείο τομής των διχοτόμων) του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$. (Εφαρμογή 2 - § 4.8).

Λύση:

Από την Εφαρμογή 2 - § 4.8 γνωρίζουμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 90° + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.Αρα πρέπει να βρούμε την $\hat{\mathrm{A}}$.

Από $\hat{\mathrm{A}} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 2\hat{\mathrm{A}}$ και αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ οπότε και $\hat{\Gamma} = 2\hat{\mathrm{A}}$.

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}} + 2\hat{\mathrm{A}} + 2\hat{\mathrm{A}} = 180° \Leftrightarrow 5\hat{\mathrm{A}} = 180° \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}} = 36°$$

Αρα τελικά $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 90° + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = 90° + \frac{36°}{2} = 90° + 18° = 108°$.

Ε3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ = 144° να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

Λύση:

Σύμφωνα με τα δεδομένα: $\hat{A} = 3\hat{B}$.

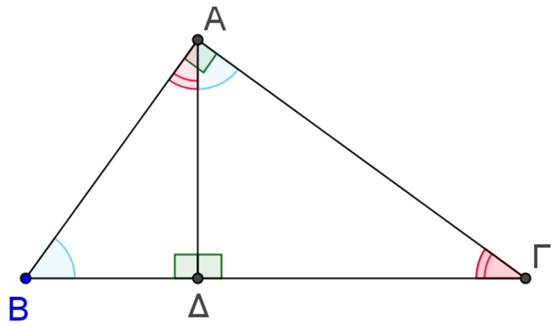
Αφού $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144°$ θα είναι: $\hat{\Gamma} = 180° - \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180° - 144° = 36°$

Επομένως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow 3\hat{B} + \hat{B} + 36° = 180° \Leftrightarrow 4\hat{B} = 180° - 36° \Leftrightarrow 4\hat{B} = 144° \Leftrightarrow \hat{B} = 36°$

Αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Ε4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$.

Λύση:



- Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
  - $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{B} = 90° - \hat{\Gamma}$ **(1)** καθώς και
  - $\hat{\Gamma} = 90° - \hat{B}$ **(2)**.
- Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε:

$\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = 90° - \hat{\Gamma}$ **(3)**

Από **(1)** και **(3)** προκύπτει ότι:

$\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$

- Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε:

$\Delta\hat{A}B + \hat{B} = 90° \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B = 90° - \hat{B}$ **(4)**

Από **(2)** και **(4)** προκύπτει ότι:

$\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$

β' τρόπος:

Αφού $BA \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp A\Delta$ θα είναι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

§4.7 Θεώρημα

Αφού $\Gamma A \perp AB$ και $\Gamma B \perp A\Delta$ θα είναι $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

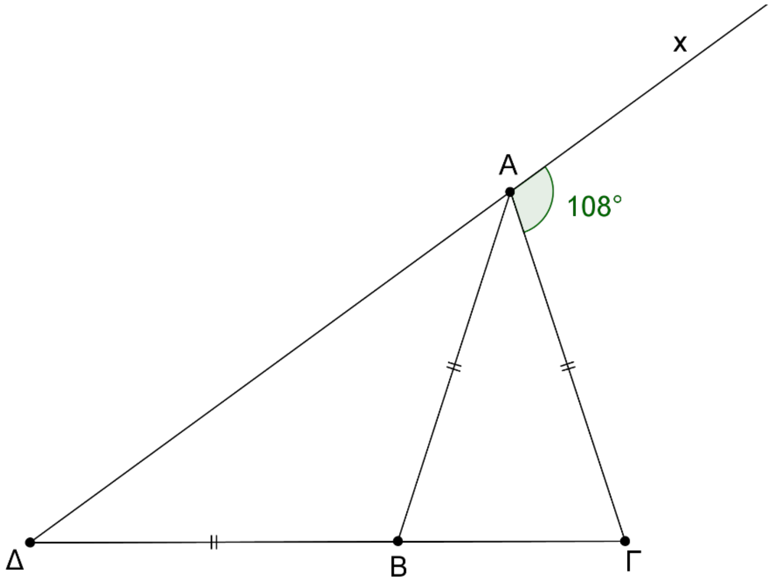
§4.7 Θεώρημα

Ε5. Στο διπλανό σχήμα είναι: $AB = A\Gamma = \Delta B$ και

$x\hat{A}\Gamma = 108°$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

Λύση:



Αφού η $x\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ

θα ισχύει $x\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta} + \hat{\Gamma}$.

Αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε

$x\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta} + \hat{B}$ **(1)**

Η $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΒ οπότε

$\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1$.Ομως το ΑΔΒ έχει ΑΒ=ΒΔ άρα θα

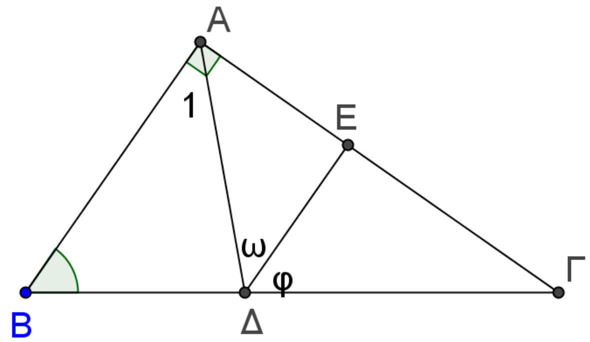
είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}_1$ κι έτσι $\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{\Delta}$

Πλέον η **(1)** γράφεται: $x\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta} + 2\hat{\Delta} \Leftrightarrow 108° = 3\hat{\Delta} \Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 108° \Leftrightarrow \frac{3\hat{\Delta}}{3} = \frac{108°}{3} \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 36°$

Ε6. Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{A} = 90°$, ΑΔ διχοτόμος, ΔΕ//ΑΒ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.

Λύση:

Σύμφωνα με τα δεδομένα:



$\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20°$ και από $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$ παίρνουμε

$\hat{\Gamma} + 20° + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35°$ οπότε

$\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20° = 55°$

Αφού ΔΕ//ΑΒ θα είναι $\varphi = \hat{B} = 55°$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων αυτών με τέμνουσα την ΒΓ.

Αφού ΑΔ διχοτόμος θα είναι $\hat{A}_1 = 45°$ οπότε και ω= $\hat{A}_1 = 45°$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ.

Παρατηρήσεις:

1. Το σχήμα στο σχολικό βιβλίο δεν είναι καλό αφού η ΑΔ δεν φαίνεται για διχοτόμος.Βέβαια όπως παρατήρησε ένας συνάδελφος

2. Μπορούμε να δημιουργήσουμε παρόμοιες ασκήσεις παίρνοντας: $0° < \hat{A} < 180°$ γωνία

Ε7. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900°. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των πλευρών κυρτού ν-γώνου είναι

$\mathrm{A\Gamma} \perp 2\nu - 4$ ορθές δηλαδή $(2\nu-4)90° = 900° \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 10 \Leftrightarrow 2\nu = 14 \Leftrightarrow \nu = \frac{14}{2} \Leftrightarrow \nu = 7$.

Αρα πρόκειται για κυρτό επτά-γωνο.