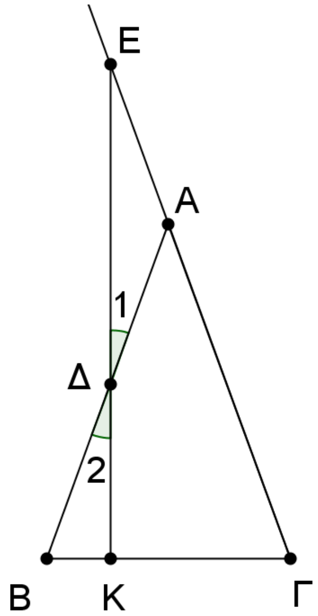
Σ1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ ⊥ ΒΓ.

Λύση:

1ος τρόπος



Η γωνία $\hat{A}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΔ οπότε ισχύει:

$\hat{A} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1$

Ομως αφού ΑΕ = ΑΔ θα ισχύει $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$

Αρα $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \hat{A} = 2\hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \dfrac{\hat{A}}{2} = \hat{\Delta}_1$ **(1)**

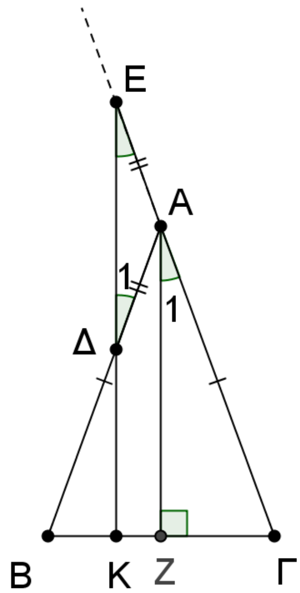
Αλλά $\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow$

$\dfrac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^\circ \overset{(1)}{\Rightarrow} \hat{\Delta}_1+\hat{B}=90^\circ \xRightarrow[\text{ως κατακορυφήν}]{\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2} \hat{\Delta}_2+\hat{B}=90^\circ$

Οπότε στο τρίγωνο ΚΔΒ, αφού οι δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90°, η τρίτη θα είναι $\hat{K}=90^\circ$ οπότε: ΔΕ ⊥ ΒΓ.

2ος τρόπος

Η γωνία $\hat{A}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΔ οπότε ισχύει:



$\hat{A} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1$

Ομως αφού ΑΕ = ΑΔ θα ισχύει $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$

Αρα $\hat{A} = \hat{E} + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{A} = 2\hat{E}$

Φέρνουμε την διχοτόμο ΑΖ της γωνίας $\hat{A}$ οπότε $\hat{A} = 2\hat{A}_1$

Αρα $2\hat{A}_1 = 2\hat{E} \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}$.

Οι ευθείες ΕΔ και ΑΖ σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες άρα είναι παράλληλες.

Ομως η διχοτόμος σε ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι και ύψος οπότε $AZ \perp B\Gamma$

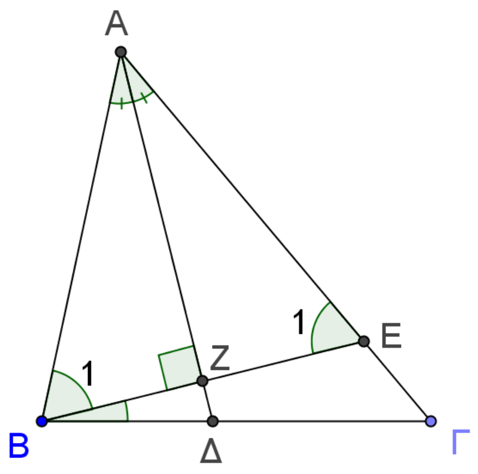
Αρα και $E\Delta \perp B\Gamma$.

Σ2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β > Γ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση:

Στο τρίγωνο ΑΒΕ η διχοτόμος ΑΖ είναι και ύψος, οπότε αυτό είναι ισοσκελές και συνεπώς $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ οπότε ισχύε:



$\hat{E}_1 = \mathrm{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma}$ **(1)**

$$\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{E}_1 \overset{(1)}{=} \hat{B} - \left(\mathrm{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma}\right) = \hat{B} - \mathrm{E\hat{B}\Gamma} - \hat{\Gamma}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

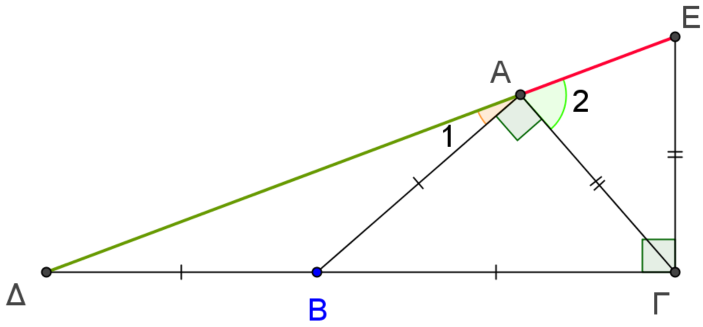
$$\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{B} - \mathrm{E\hat{B}\Gamma} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{B}\Gamma} + \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Σ3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή (προς το μέρος του Α) τμήμα ΓΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

Λύση:



Αφού ΒΑ=ΒΔ θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$

Ομως η $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΑ επομένως

$$\hat{B} = \hat{A}_1 + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$$

Αφού ΓΕ=ΓΑ θα είναι $\hat{A}_2 = \hat{E}$

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_2 + \hat{E} = 180° \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_2 = 180° \Leftrightarrow 90° - \hat{\Gamma} + 2\hat{A}_2 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{A}_2 = 180° - 90° + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$2\hat{A}_2 = 90° + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}_2 = \frac{90°}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Αρα $\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + 90° + \frac{90°}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90° + \frac{90°}{2} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = 90° + \frac{90°}{2} + \frac{90°}{2} = 90° + 90° = 180°$

Αρα η γωνία $\Delta\hat{A}E = 180°$ οπότε τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

***<u>Σημειώσεις</u>**: 1. Εβαλα διαφορετικό χρώμα στα τμήματα ΔΑ και ΑΕ για να τονίσω ότι αρχικά δεν ξέρουμε ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία.*

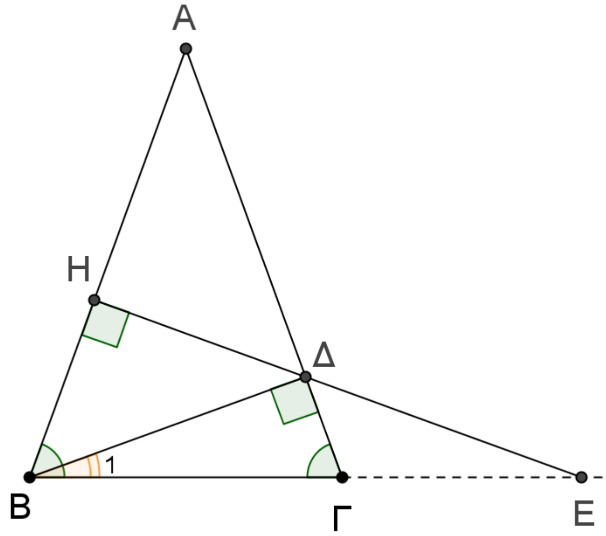
2. Στην έκδοση του σχολικού που χρησιμοποιώ νομίζω η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί αναφέρεται στο τρίγωνο ΕΓΔ αλλά αφού δεν γνωρίζουμε ότι ΕΔ είναι τμήμα και όχι τεθλασμένη γραμμή δεν μπορώ να το χρησιμοποιήσω.

Σ4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΒΔ. Φέρουμε ΔΗ ⊥ ΑΒ, που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i) ΒΔ = ΔΕ,   **ii)** ΒΓ > ΓΕ.

Λύση:

Σκέψη: *Αφού τα τρίγωνα που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ίσα έχουν κοινό άκρο αρκεί να δείξουμε* ότι σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΕΒ έχουμε:

$\hat{E} = 90° - \hat{B}$ **(1)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:

$\hat{B}_1 = 90° - \hat{\Gamma}$ **(2)**

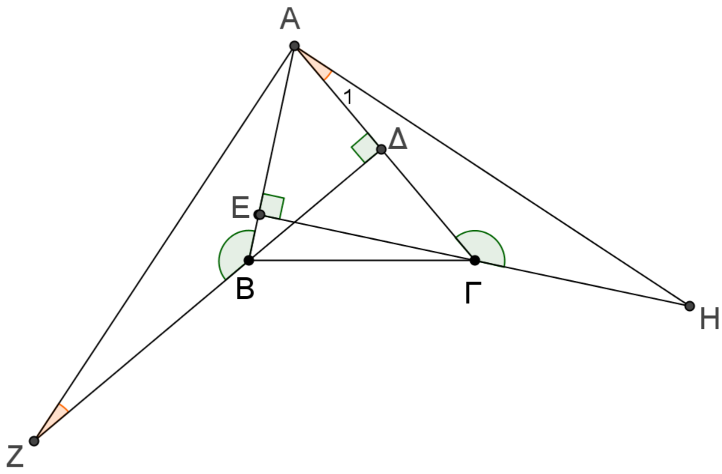
Ομως αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\hat{B}_1 = \hat{E}$.Αρα ΔΕ=ΒΔ

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ είκναι ΒΓ>ΒΔ.Ομως όπως δείξαμε στο i) ΒΔ=ΔΕ άρα ΒΓ>ΓΕ.

Σ5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ, προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα ΒΖ=ΑΓ και ΓΗ=ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i) ΑΖ=ΑΗ, ii) ΑΖ ⊥ ΑΗ.

Λύση:



• Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}Z}$ είναι εξωτερική γωνία στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ, επομένως ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών δηλαδή $\mathrm{A\hat{B}Z} = 90° + \hat{A}$.

• Η γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}H}$ $\mathrm{A\hat{B}Z}$ είναι εξωτερική γωνία στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΓ επομένως ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών δηλαδή $\mathrm{A\hat{B}Z} = 90° + \hat{A}$.

• Τα τρίγωνα ΒΑΖ και ΓΗΑ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BZ} = \mathrm{A\Gamma} \\ \mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma H} \\ \mathrm{A\hat{B}Z} = \mathrm{A\hat{\Gamma}H} = 90° + \hat{\mathrm{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Π-Γ-Π είναι ίσα οπότε θα έχουν και ΑΖ=ΑΗ καθώς και $\hat{A}_1 = \hat{Z}$

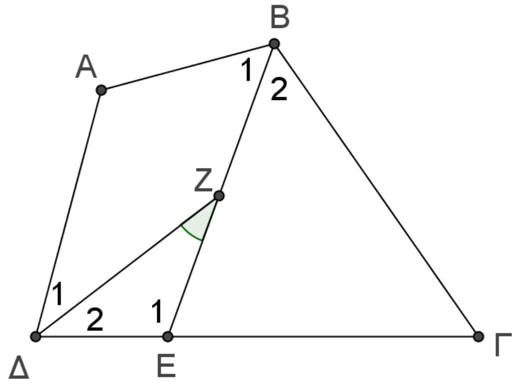
ii) $\mathrm{Z\hat{A}H} = \mathrm{Z\hat{A}\Delta} + \hat{A}_1 = \mathrm{Z\hat{A}\Delta} + \hat{Z} \overset{\substack{\text{ορθογώνιο τρίγωνο} \\ \Delta AZ}}{=} 90°$, οπότε ΑΖ ⊥ ΑΗ.

Σ6. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α > Γ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών Β και Δ. Να αποδείξετε ότι φ = Α + Γ2.

Λύση:

Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι:

$$\varphi+\hat{\Delta}_2+\hat{E}_1=180^\circ \Leftrightarrow \varphi+\frac{\hat{\Delta}}{2}+\hat{E}_1=180^\circ \quad (1)$$



Ομως η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΓ οπότε:

$$\hat{E}_1=\hat{B}_2+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$\varphi+\frac{\hat{\Delta}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}=180^\circ$$

Ομως γνωρίζουμε ότι: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{360^\circ}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=180^\circ$

$$\varphi+\frac{\hat{\Delta}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \varphi+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}$$

Σημείωση: Στο παλιό σχολικό (Αλιμπίνίσης Δημάκος Κοντογιάννης κά) αποδεικνύει ότι όντως οι διχοτόμοι τέμνονται ως εξής:

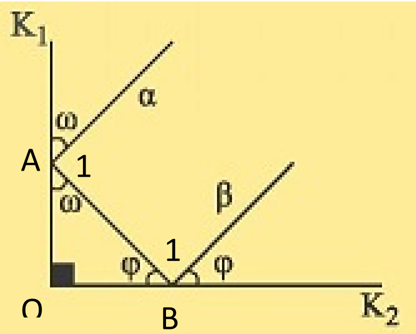
Αρχικά δείχνει ότι η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει την ΓΔ: *(Πρόταση IV της 4.2)*

$$\hat{B}_2+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{B}+2\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}}{2}\le\frac{\hat{B}+\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}\le\frac{\hat{B}+\hat{A}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

Ακολούθως δείχνει ότι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ τέμνει την ΒΕ: *(Πρόταση IV της 4.2)*

$$\hat{\Delta}_2+\hat{E}_1=\frac{\hat{\Delta}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\Delta}+\hat{B}+2\hat{\Gamma}}{2}\le\frac{\hat{\Delta}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}}{2}\le\frac{\hat{\Delta}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{A}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

Σ7. Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1 ,K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;



Λύση:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε ότι: $\omega + \varphi = 90°$.

Γνωρίζουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την γωνία ανάκλασης

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° - 2\omega + 180° - 2\varphi = 360° - 2(\omega + \varphi) = 360° - 2 \cdot 90° = 360° - 180° = 180°$$

δηλαδή οι ευθείες α και β τεμνόμενες από την ΑΒ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, άρα είναι παράλληλες.