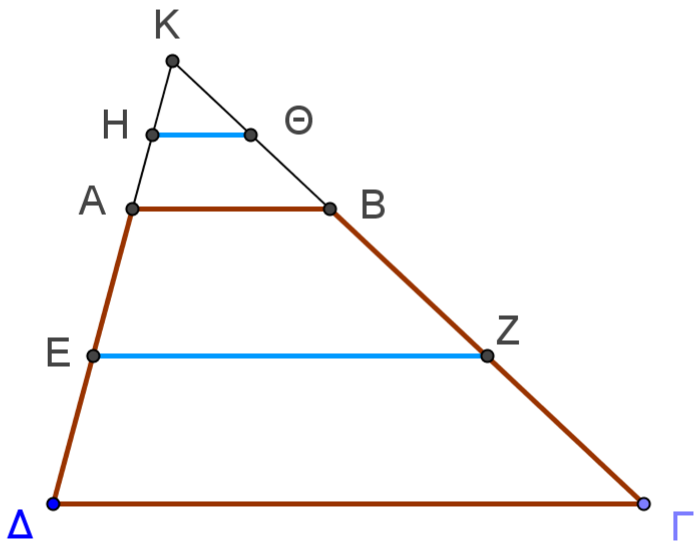
Ασκήσεις στην παράγραφο § 5.10

Ε1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.*

Λύση:



Στο τρίγωνο ΚΑΒ είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η μέσο ΚΑ}\\ \text{Θ μέσο ΚΒ}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΗΘ}//\text{ΑΒ} \quad (1)$$

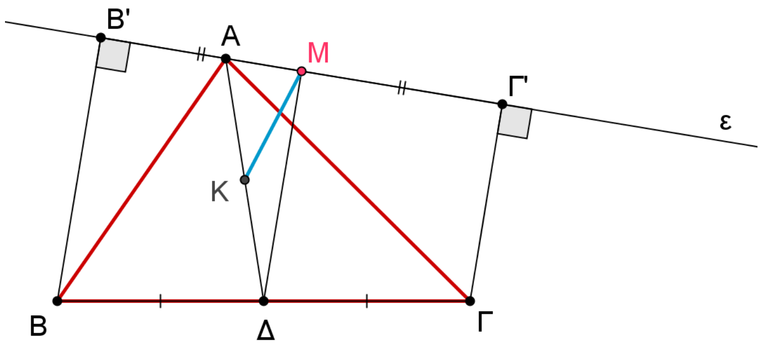
Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις επομένως και ΕΖ// ΑΒ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΗΘ//ΕΖ.

Επιπλέον ΗΕ και ΘΖ τέμνονται στο Κ οπότε σύμφωνα με τον ορισμό το ΗΘΖΕ είναι τραπέζιο.

Ε6. *Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ′ και ΓΓ′ οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β′Γ′ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι* $\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$

Λύση:



$$\left.\begin{array}{l}\text{ΒΒ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\\ \text{ΓΓ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΒΒ}'//\text{ΓΓ}' \quad \textit{(Πόρισμα ΙΙ§4.2)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Μ μέσο Β}'\text{Γ}'\\ \text{Δ μέσο ΒΓ}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΜΔ διάμεσος του τραπεζίου ΒΒ}'\text{Γ}'\text{Γ}.$$

οπότε $\text{ΜΔ}//\text{ΓΓ}'$ *(§ 5.10 Θεώρημα Ι)*

$$\left.\begin{array}{l}\text{ΜΔ}//\text{ΓΓ}'\\ \text{ΓΓ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΜΔ} \perp \text{Β}'\text{Γ}' \qquad \textit{(ΠΟΡΙΣΜΑ στην Πρόταση ΙΙΙ ιδιότητες παραλλήλων ευθειών)}$$

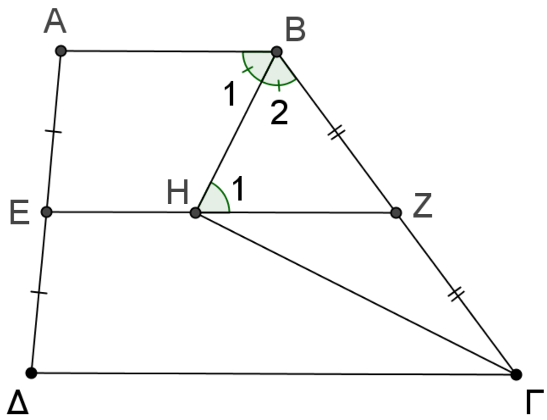
Αρα $\text{Δ}\hat{\text{Μ}}\text{Α} = 90°$ οπότε αφού ΜΚ διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, θα είναι

$\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ *(5.9 Θεώρημα Ι).*

Α1. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι* $B\hat{H}\Gamma = 90°$.

Λύση:

<u>1η λύση:</u>



Είναι ΕΖ//ΑΒ *(§ 5.10 Θεώρημα Ι) οπότε*

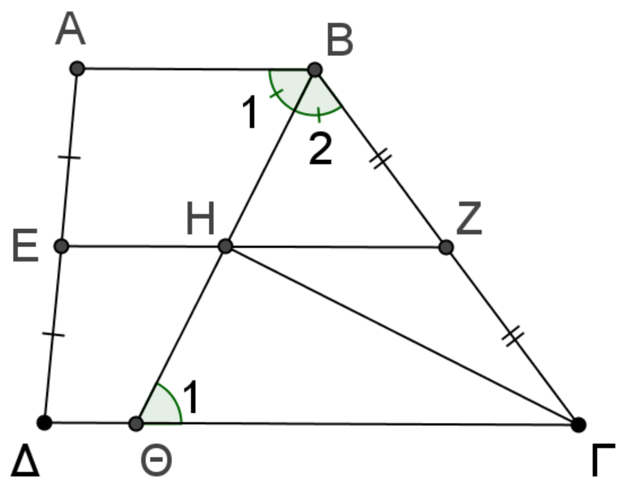
οπότε $\hat{B}_1 = \hat{H}_1$ **(1)** ως εντός εναλλάξ.

Επιπλέον αφού ΒΗ διχοτόμος, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ **(1).**

Από **(1)** και **(2)** $\hat{H}_1 = \hat{B}_2$ οπότε $HZ = ZB = Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

Στο τρίγωνο ΗΒΓ η διάμεσος ΗΖ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί οπότε είναι $B\hat{H}\Gamma = 90°$ *(§ 5.9 Θεώρημα ΙΙ).*

<u>2η λύση</u>:



Η διχοτόμος της Β τέμνει την ΔΓ στο Θ.

Επειδή ΑΒ//ΔΓ, είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Theta}_1$ **(1)** ως εντός εναλλάξ.

Επιπλέον αφού ΒΗ διχοτόμος $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_2$ οπότε $\Gamma B = \Gamma\Theta$.

Είναι ΕΖ//ΔΓ (§ 5.10 Θεώρημα Ι) άρα και ΖΗ//ΓΘ,

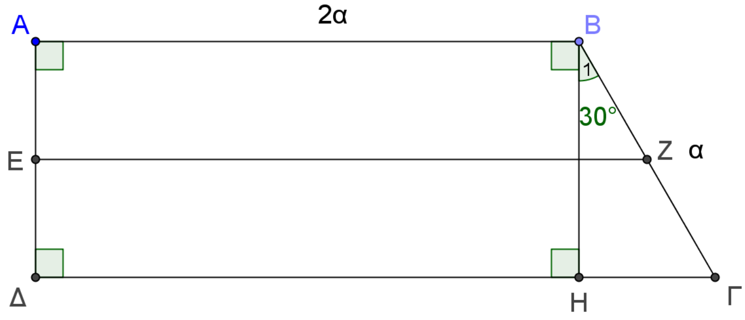
οπότε στο τρίγωνο ΒΘΓ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} Z \text{ μέσο } B\Gamma \\ ZH \,//\, \Gamma\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow H \text{ μέσο } B\Theta.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο η ΓΘΒ είναι διάμεσος άρα θα είναι και ύψος οπότε $B\hat{H}\Gamma = 90°$.

Α3. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$ *και* $\hat{B}=120^\circ$. *Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.*

Λύση:



- Φέρνουμε το ύψος ΒΗ του τραπεζίου.Τότε το ΑΒΗΔ είναι ορθογώνιο γιατί έχει 3 γωνίες ορθές.Οπότε ΔΗ=ΑΒ=2α.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ η γωνία $\hat{B}_1=120^\circ-90^\circ=30^\circ$.

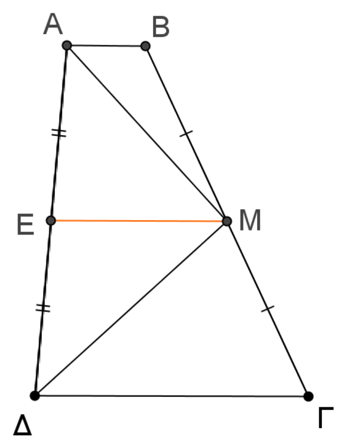
Αρα είναι $H\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$ *(Πόρισμα § 5.9)*

- Επομένως $\Delta\Gamma=\Delta H+H\Gamma=2\alpha+\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5\alpha}{2}$
- Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων οπότε:

$$EZ=\frac{AB+\Delta\Gamma}{2}=\frac{2\alpha+\frac{5\alpha}{2}}{2}=\frac{\frac{4\alpha}{2}+\frac{5\alpha}{2}}{2}=\frac{\frac{9\alpha}{2}}{2}=\frac{9\alpha}{4}$$

Α4. *Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Delta=90^\circ$.

Λύση:



Σύμφωνα με τα δεδομένα $A\Delta=AB+\Delta\Gamma$.

Εστω Ε το μέσο του ΑΔ. Τότε η ΜΕ είναι διάμεσος του τραπεζίου οπότε θα ισχύει:

$ME=\dfrac{AB+\Delta\Gamma}{2}=\dfrac{A\Delta}{2}$ *(§ 5.10 Θεώρημα Ι)*

Στο τρίγωνο ΑΜΔ η διάμεσος ΜΕ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί οπότε $A\hat{M}\Delta=90^\circ$ *(§ 5.9 Θεώρημα ΙΙ).*