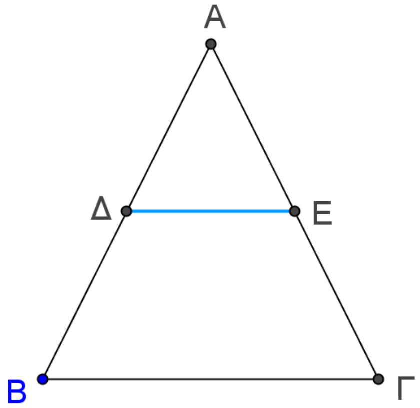
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ε2. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*



Λύση:

Αφού:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB\\ E \text{ μέσο } A\Gamma\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta E//B\Gamma$$

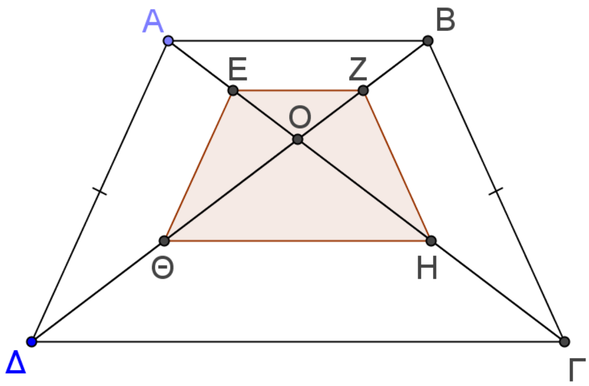
Επιπλέον ΒΔ και ΓΕ τέμνονται.

Αρα σύμφωνα με τον ορισμό το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

- $AB = A\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta B = E\Gamma$ δηλαδή το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Ε3. *Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

Λύση:



- *Στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:*

$$\left.\begin{array}{l}E \text{ μέσο } OA\\ Z \text{ μέσο } OB\end{array}\right\}\Rightarrow EZ//AB \quad \textbf{(1)}$$

- *Στο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε:*

$$\left.\begin{array}{l}\Theta \text{ μέσο } O\Delta\\ H \text{ μέσο } O\Gamma\end{array}\right\}\Rightarrow \Theta H//\Delta\Gamma \quad \textbf{(2)}$$

- Μας δίνεται ότι ΑΒ//ΓΔ **(3).** Αρα από **(1)**, **(2)**, **(3)** ΕΖ//ΘΗ.

- *Στο τρίγωνο ΟΑΔ έχουμε:*

$$\left.\begin{array}{l}E \text{ μέσο } OA\\ \Theta \text{ μέσο } O\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow E\Theta// = \frac{A\Delta}{2} \quad (3)$$

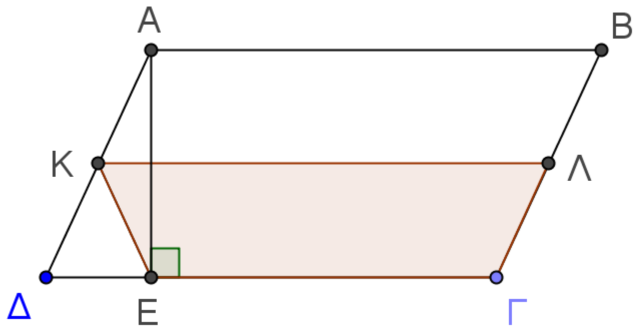
- *Στο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:*

$$\left.\begin{array}{l}Z \text{ μέσο } OB\\ H \text{ μέσο } O\Gamma\end{array}\right\}\Rightarrow ZH// = \frac{B\Gamma}{2} \quad (4)$$

- Επειδή οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται και οι παράλληλες προς αυτές ΕΘ και ΖΗ θα τέμνονται.
- Αρα σύμφωνα με τον ορισμό του τραπεζίου το ΕΖΗΘ είναι τραπέζιο.
- Είναι $E\Theta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = ZH$.Αρα το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Ε4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

Λύση:



- Αφού ΚΛ διάμεσος του τραπεζίου θα είναι ως γνωστόν ΚΛ//ΔΓ οπότε και ΚΛ//ΕΓ.
- Αφού η ΚΛ τέμνει την ΑΔ θα τέμνει και την παράλληλή της ΒΓ οπότε οι ΚΕ και ΓΛ τέμνονται

Αρα το ΚΛΓΕ σύμφωνα με τον ορισμό είναι τραπέζιο.

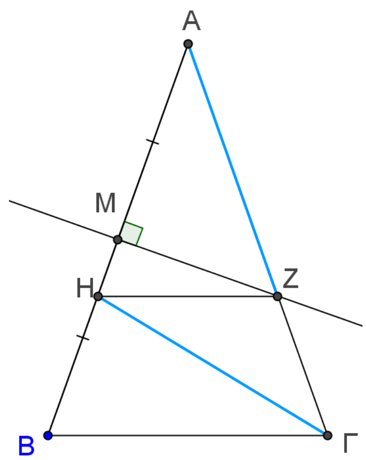
Το ΚΛΓΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.Αρα ΛΓ=ΚΔ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΔ η ΕΚ είναι διάμεσος από την ορθή γωνία άρα

$\mathrm{KE} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} = \mathrm{K\Delta}$ (2). Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι ΓΛ=ΕΚ άρα το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Α2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.*

Λύση:



- Αφού ΗΖ//ΒΓ και οι ΗΒ και ΖΓ τέμνονται στο Α, το ΗΖΓΒ είναι τραπέζιο.
- Επιπλέον επειδή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ, το ΗΖΓΒ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

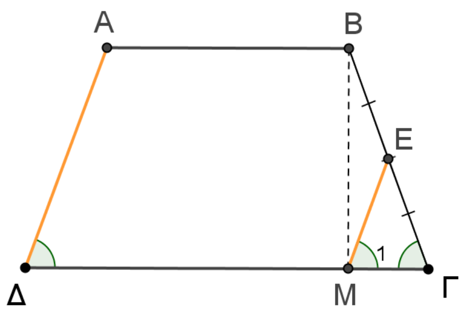
Τότε όμως και οι διαγώνιοί του θα είναι ίσες δηλαδή ΓΗ=ΒΖ **(1)**

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του.Αρα ΖΑ=ΖΒ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι ΓΗ=ΖΑ ή ΓΗ=ΑΖ *(αφού στην γραφή ενός ευθυγράμμου τμήματος δεν παίζει ρόλο η σειρά των γραμμάτων)*

Α5. *Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την ΔΓ στο Μ.Να αποδείξετε ότι ΒΜ* $\perp$ *ΔΓ.*

Λύση:



Αφού ΕΜ//ΑΔ θα είναι $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}$ **(1)** ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Επειδή ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Gamma}$, άρα και $\mathrm{ME} = \mathrm{E\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$,

οπότε από γνωστό θεώρημα το $\mathrm{B\hat{M}\Gamma} = 90°$ δηλαδή *ΒΜ* $\perp$ *ΔΓ.*