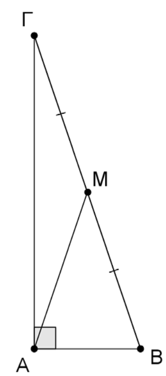
ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα πιο κάτω θεωρήματα καθώς και το Θεώρημα Ι σ. 104 είναι SOS όχι μόνο για θεωρία αλλά και για χρήση στις ασκήσεις, οπότε πρέπει να κατανοήσετε τι λένε, να ξέρετε την απόδειξη και να είστε έτοιμοι να τα εφαρμόσετε.

Τα Θεωρήματα Ι και Θεώρημα ΙΙ τα αποδεικνύω με διαφορετικό τρόπο από το βιβλίο, αλλά παραθέτω και την απόδειξη του σχολικού.Αν πέσει κάποιο από αυτά και κάποιος προτιμήσει την απόδειξη του βιβλίου φυσικά δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα.Αν την γράψει σωστά θα πάρει όλους τους σχετικούς βαθμούς.

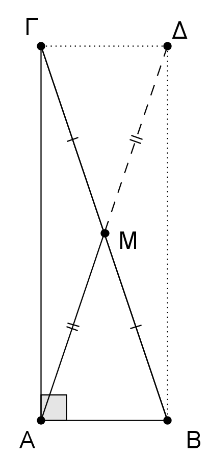
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



Απόδειξη:

Εστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και ΑΜ η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας.



Θα δείξουμε ότι $AM = \frac{\Gamma B}{2}$.

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΑΜ.

Για το τετράπλευρο ΓΔΒΑ έχουμε:

i) Επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο *(δες σχολικό σελ. 98 κριτήριο για παραλληλόγραμμα (iv).)*

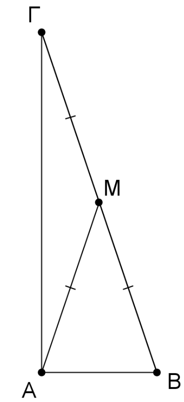
ii) Επειδή επιπλέον ($\hat{A} = 90°$) είναι ορθογώνιο *(δες σχολικό σ.100 Ορισμός «Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή).*

Αρα οι διαγώνιοί του είναι ίσες: *(Ιδιότητα του ορθογωνίου σε. 100-101 σχολικό)*

$$A\Delta = \Gamma B \Leftrightarrow 2AM = \Gamma B \Leftrightarrow AM = \frac{\Gamma B}{2}.$$

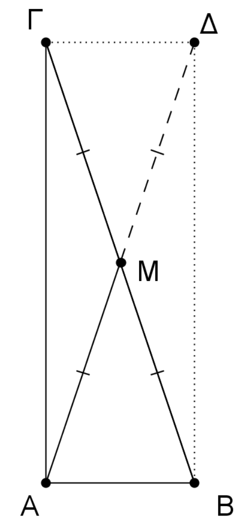
Θεώρημα ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και την διάμεσό του ΑΜ.Αν $\text{ΑΜ}=\frac{\text{ΓΒ}}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{\text{Α}}$ είναι ορθή.



Προεκτείνουμε την διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΑΜ.

Για το τετράπλευρο ΓΔΒΑ ισχύει:

i) Είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ii) Επιπλέον $\text{ΑΜ}=\frac{\text{ΓΒ}}{2}\Leftrightarrow 2\text{ΑΜ}=\text{ΓΒ}\Leftrightarrow \text{ΑΜ}+\text{ΑΜ}=\text{ΓΒ}\Leftrightarrow \text{ΑΜ}+\text{ΜΔ}=\text{ΓΒ}\Leftrightarrow \text{ΑΔ}=\text{ΒΓ}$

δηλαδή οι διαγώνιες ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΓΔΒΑ είναι ίσες, οπότε από γνωστό κριτήριο *(κριτήριο ii) σελ. 101 σχολικού)*, το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

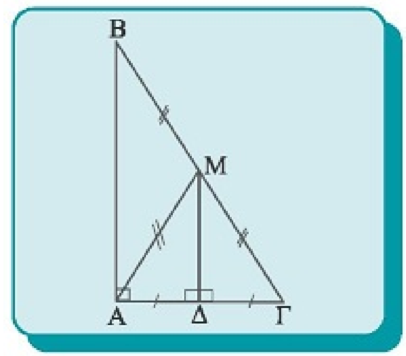
Επομένως όλες οι γωνίες του θα είναι ορθές άρα και $\hat{\text{Α}}$=1 ορθή.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ

Θεώρημα Ι

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη:



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) και τη διάμεσό του ΑΜ Θα αποδείξουμε ότι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε

ΜΔ // ΑΒ. Αλλά ΑΒ ⊥ ΑΓ, επομένως και ΜΔ ⊥ ΑΓ.

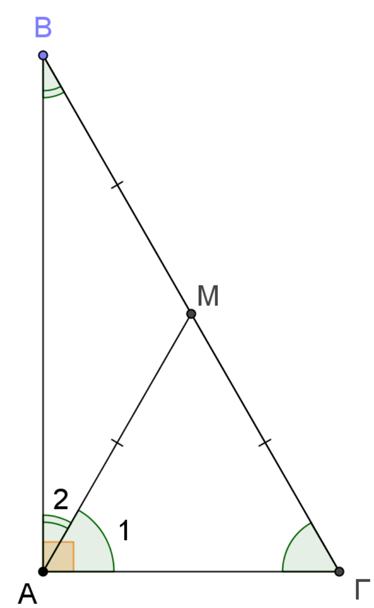
Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Θεώρημα ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη:



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ.

Αν $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή.

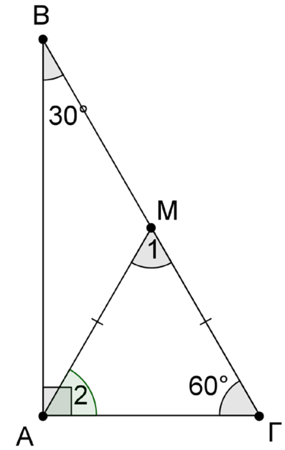
Επειδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{Α}_2 = \hat{Β}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = \hat{Γ} + \hat{Β}$, δηλαδή $\hat{Α} = \hat{Γ} + \hat{Β}$. Αλλά $\hat{Α} + \hat{Γ} + \hat{Β} = 2\llcorner$, οπότε $\hat{Α} + \hat{Α} = 2\llcorner$ ή $2\hat{Α} = 2\llcorner$ ή $\hat{Α} = 1\llcorner$.

Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη:



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΓΒ}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{Γ} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

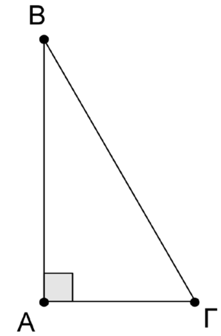
Φέρουμε την διάμεσο ΑΜ οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα *(Θεώρημα Ι σ. 109)* είναι $AM = \frac{ΓΒ}{2} = ΜΓ$. Δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση ΑΓ,οπότε όπως γνωρίζουμε *(Πόρισμα Ι σελ 37 σχολικού)* οι προσκείμενες γωνίες στην βάση θα είναι ίσες δηλαδή $\hat{A}_2 = \hat{Γ} = 60^\circ$.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°, θα είναι και $\hat{M}_1 = 60^\circ$ δηλαδή όλες οι γωνίες του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσες με 60°, οπότε *(Πόρισμα iii) σελ 54 σχολικό)* το τρίγωνο ΜΑΒ θα είναι ισόπλευρο.

Αρα: $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΓΒ}{2}$.

Πόρισμα (αντίστροφο)

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι οξεία γωνία είναι 30° μοίρες.



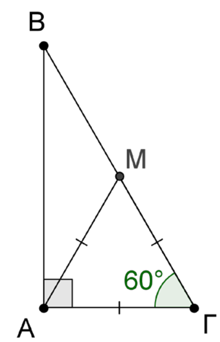
$$\mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{\Gamma B}}{2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$), με $\mathrm{A\Gamma} = \dfrac{\mathrm{\Gamma B}}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι. $\hat{\mathrm{B}} = 30^\circ$.

Φέρουμε την διάμεσο ΑΜ, οπότε $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \mathrm{M\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}$.



Αρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, συνεπώς θα έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 60°.

(ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ σ.37+ΠΟΡΙΣΜΑ iv) σ.84) οπότε και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Αρα $\hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.